文章编号:1672-058X(2011)02-0150-04

随机收入下的对偶风险模型*

彭之光
(重庆大学 数学与统计学院,重庆 400044)

摘　要:研究了随机收入的更新风险模型的对偶情况;在这个对偶模型中,到 t 时刻积累的理赔额服从 possion 分布,并且盈利次数服从 Erlang(2) 分布;盈利额度服从几何分布.最后求解了当初始资金为 0 时的破产概率.

关键词:罚金折现函数;生成函数;破产时间
中图分类号:O21　　文献标志码:A

1 模型介绍

考虑随机收入的更新风险模型的对偶模型,在原模型中,考虑这样一种盈余过程:

$$U(t) = u + M(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{1}$$

其中,$u\geqslant 0$ 为初始时刻的资金;$\{M(t), t\geqslant 0\}$ 为一个 $\lambda\geqslant 0$ 的 poisson 过程,表示随机收入.为方便计算,取 $\lambda=1$;$N(t)=\max\{n, V_1+V_2\cdots+V_n\leqslant t\}$ $(t\geqslant 0)$ 为理赔次数,其中 $V_i(i\geqslant 2)$ 是第 $i-1$ 和第 i 次的理赔时间间隔,V_1 是到第一次理赔发生时所经过的时间.在这里假设$\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$独立同分布并服从 Erlang(n) 分布,即 $V_1 = W_1+W_2+\cdots+W_n$,其中$\{W_i\}_{i=1}^{n}$为 n 个独立的指数分布并,且 $E[W_i]=\frac{1}{\lambda_i}$;$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$为一组独立同分布的序列,代表理赔额;假定$\{M(t), t\geqslant 0\}$,$\{N(t), t\geqslant 0\}$,$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$是相互独立的.将上述模型的理赔与盈利调换,考虑它的对偶形式:

$$U(t) = u - M(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{2}$$

符号和基本假设与上面一致,该模型即为随机收入的盈余过程.为简单起见,考虑时间间隔服从 Erlang(2) 分布,收入服从几何分布的对偶模型.

为使模型的破产概率有意义(否则模型必然破产,即破产概率为 1),有如下条件:

$$\lambda < \frac{\mu}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}} \tag{3}$$

其中 λ_1,λ_2 是 Erlang(2) 分布的参数,μ 是几何分布的期望,λ 为前面提到的 poisson 过程参数:$\lambda=1$.

2 关于破产概率的方程

首先引入如下函数和符号[1]:$m(u)$,初始资金为 u 的破产概率;对于 $i=0,1,2$,$S_1=W_1$,$S_2=W_1+W_2$

收稿日期:2010-09-25;修回日期:2010-10-25.
* 项目基金:重庆大学研究生科技创新基金(200911B1B0110327).
作者简介:彭之光(1986-),男,重庆市人,硕士研究生,从事随机精算模型研究.

(Erlang(2))，定义 $m_{\delta,i}(u)=E[e^{-(\tau-t)}I(\tau<\infty)\mid S_i=t, U(t)=u]$，知 $m(u)=m_{0,0}(u)=m_{0,2}(u)$. 对于 $i=0$，根据 W_1(几何分布)的无记忆性有：

$$\begin{aligned} m_{\delta,0}(u) &= \sum_{k=0}^{u}\int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}P(M(t)=k)m_{\delta,1}(u-k)\,dt+\sum_{k=u+1}^{\infty}\int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}P(M(t)=u+1)\,dt= \\ &\sum_{k=0}^{u}\frac{\lambda_1\lambda^k}{k!}\int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda+\delta)t}t^k m_{\delta,1}(u-k)\,dt+\sum_{k=u+1}^{\infty}\frac{\lambda_1\lambda^k}{k!}\int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda+\delta)t}t^k\,dt= \\ &\sum_{k=0}^{u}p_1q_1^k m_{\delta.1}(u-k)+\sum_{k=u+1}^{\infty}p_1q_1^k \end{aligned} \tag{4}$$

其中，$p_1=\dfrac{\lambda_i}{\lambda+\lambda_i+\delta}$，$q_1=\dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}$，$i=1,2$. 对于 $i=1$，又有：

$$\begin{aligned} m_{\delta,1}(u) &= \sum_{k=0}^{u}\int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_2+\delta)t}P(M(t)=k)\,dt\times\sum_{i=1}^{\infty}m_0(u-k+i)f(i)+ \\ &\sum_{k=u+1}^{\infty}\int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_2+\delta)t}P(M(t)=u+1)\,dt=\sum_{k=0}^{u}p_2q_2^k\sum_{i=1}^{\infty}m_{\delta,0}(u-k+i)f(i)+\sum_{k=u+1}^{\infty}p_2q_2^k= \\ &\sum_{k=0}^{u}p_2q_2^k\gamma(u-k)+\sum_{k=u+1}^{\infty}p_2q_2^k \end{aligned} \tag{5}$$

其中，$\gamma(u)=\sum_{i=1}^{\infty}m_{\delta,0}(u+i)f(i)$.

由式(4)有：

$$\begin{aligned} m_{\delta,0}(u+1) &= \sum_{k=0}^{u+1}p_1q_1^k m_{\delta,1}(u+1-k)+\sum_{k=u+2}^{\infty}p_1q_1^k= \\ &q\Big(\sum_{k=0}^{u}p_1q_1^k m_{\delta,1}(u-k)+\sum_{k=u+1}^{\infty}p_1q_1^k\Big)+p_1m_{\delta,1}(u+1)= \\ &q_1m_{\delta,0}(u)+p_1m_{\delta,1}(u+1) \end{aligned} \tag{6}$$

同理，由式(5)有：

$$m_{\delta,1}(u+1)=q_2m_{\delta,1}(u)+p_2\gamma(u+1) \tag{7}$$

接下来定义如下生成函数，将式(6)两边同时乘以 s^u，并取 $u=0,1,\cdots,\infty$ 的形式，以无穷级数的形式相加有：

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{\infty}s^u m_{\delta,0}(u+1) &= \sum_{u=0}^{\infty}q_1s^u m_{\delta,0}(u)+\sum_{u=0}^{\infty}p_1s^u m_{\delta,1}(u+1)\ \frac{1}{s}\Big(\sum_{u=0}^{\infty}s^u m_{\delta,0}(u)-m_{\delta,0}(0)\Big)= \\ &q_1\hat{m}_{\delta,0}(s)+\frac{p_1}{s}\Big(\sum_{u=0}^{\infty}s^u m_{\delta,1}(u)-m_{\delta,1}(0)\Big) \\ &(1-sq_1)\hat{m}_{\delta,0}(s)-p_1\hat{m}_{\delta,1}(s)=m_{\delta,0}(0)-p_1m_{\delta,1}(0) \end{aligned} \tag{8}$$

同理，对于式(7)，有：$\hat{m}_{\delta,1}(s)-m_{\delta,1}(0)=q_2s\hat{m}_{\delta,1}(s)+\sum_{u=0}^{\infty}p_2s^{u+1}\gamma(u+1)$.

在此假设 $f(i)$ 服从几何分布，取 $t=u+i+1$，则 $u+1=t-i$，其中：

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{\infty}p_2s^{u+1}\gamma(u+1) &= \sum_{u=0}^{\infty}p_2s^{u+1}\sum_{i=1}^{\infty}m_{\delta,0}(u+1+i)f(i)= \\ &\sum_{u=0}^{\infty}p_2s^{u+1}\sum_{i=0}^{\infty}m_{\delta,0}(u+1+i)(1-\alpha)\alpha^i= \\ &\sum_{t=1}^{\infty}p_2s^t\sum_{i=0}^{t-1}m_{\delta,0}(t)(1-\alpha)\alpha^i s^{-i}= \\ &p_2(1-\alpha)\sum_{t=1}^{\infty}m_{\delta,0}(t)s^t\sum_{i=0}^{t-1}\Big(\frac{\alpha}{s}\Big)^i= \end{aligned}$$

$$\frac{p_2(1-\alpha)}{(1-\frac{\alpha}{s})}(\hat{m}_{\delta,0}(s)-\hat{m}_{\delta,0}(\alpha))\ \hat{m}_{\delta,1}(s)-m_{\delta,1}(0)=$$

$$q_2 s\,\hat{m}_{\delta,1}(s)+\frac{p_2(1-\alpha)}{(1-\frac{\alpha}{s})}(\hat{m}_{\delta,0}(s)-\hat{m}_{\delta,0}(\alpha)) \tag{9}$$

最后,得到下面两个方程:

1) $\frac{p_2(1-\alpha)}{(1-\frac{\alpha}{s})}\hat{m}_0(s)+(q_2s-1)\hat{m}_1(s)=\frac{p_2(1-\alpha)}{(1-\frac{\alpha}{s})}\hat{m}_0(\alpha)-m_1(0)$;

2) $(1-sq_1)\hat{m}_0(s)-p_1\hat{m}_1(s)=m_0(0)-p_1m_1(0)$.

将这两个方程写成矩阵形式有:

$$A(s)=\begin{pmatrix} sq_1-1 & p_1 \\ \frac{sp_2(1-\alpha)}{s-\alpha} & sq_2-1 \end{pmatrix},\overrightarrow{\hat{m}(s)}=(\hat{m}_{\delta,0}(s)\quad \hat{m}_{\delta,1}(s))^{\mathrm{T}}\quad D(s)=\begin{pmatrix} p_1m_{\delta,1}(0)-m_{\delta,0}(0) \\ \frac{p_2(1-\alpha)}{(1-\frac{\alpha}{s})}\hat{m}_{\delta,0}(\alpha))-m_{\delta,1}(0) \end{pmatrix}$$

$$A(s)\overrightarrow{\hat{m}(s)}=D(s) \tag{10}$$

考虑如下方程:

$$(sq_1-1)(sq_2-1)=\frac{sp_2p_1(1-\alpha)}{s-\alpha} \tag{11}$$

式(10)等价于$|A(s)|=0$.

定理1 对任意$\delta\geqslant 0$,式(11)在单位圆内存在一个根.

证明 设ξ为以α为圆心,以$1-\alpha$为半径的圆.考虑下面的方程:$(sq_1-1)(sq_2-1)(s-\alpha)=sp_2p_1(1-\alpha)$.

对任意$s\in\xi$,有:

$$|(sq_1-1)(sq_2-1)(s-\alpha)|\geqslant|(q_1-1)(q_2-1)(1-\alpha)|=$$

$$\frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)(1-\alpha)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}>\frac{\lambda_1\lambda_2(1-\alpha)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}=$$

$$|(1-\alpha)p_1p_2|\geqslant|s(1-\alpha)p_1p_2|$$

由儒歇定理,知道:$(sq_1-1)(sq_2-1)(s-\alpha)$和$sp_2p_1(1-\alpha)$在单位圆内有同样数目的根,易知$\alpha$不是式(11)的根.可知有一个根$\rho$在$\xi$内.

3 函数 $m_{\delta,i}(0)$

已知$|A(s)|=0$在单位圆内有根ρ,所以存在向量$k(\rho)$使$A^{\mathrm{T}}(\rho)k(\rho)=0$成立.可以验证下面的向量满足式(11).$k(\rho_i)=\begin{pmatrix}\frac{1-\rho q_2}{p_1} & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$满足方程:$A^{\mathrm{T}}(\rho)k(\rho)=0$。

由式(11),有:$D^{\mathrm{T}}(\rho)k(\rho)=\overrightarrow{\hat{m}(s)}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(\rho)k(\rho)=0$.即:

$$D^{\mathrm{T}}(\rho)k(\rho)=\left(\frac{1-\rho q_2}{p_1}\quad 1\right)\begin{pmatrix} p_1m_{\delta,1}(0)-m_{\delta,0}(0) \\ \frac{p_2(1-\alpha)}{(1-\frac{\alpha}{s})}\hat{m}_{\delta,0}(\alpha)-m_{\delta,1}(0) \end{pmatrix}=0,i=1,2.$$

对于式(4)取$u=0$有:$m_{\delta,0}(0)=p_1m_{\delta,1}(0)+\sum_{k=1}^{\infty}p_1q_1^k$.

对于式(5)，取 $u=0$，有：$m_{\delta,1}(0)=p_2(1-\alpha)\hat{m}_{\delta,0}(\alpha)+\sum_{k=1}^{\infty}p_2q_2^k$.

到现在为止得到 3 个方程：

$$\begin{cases}\dfrac{1-\rho q_2}{p_1}(p_1m_{\delta,1}(0)-m_{\delta,0}(0))=m_{\delta,1}(0)-\dfrac{p_2(1-\alpha)}{(1-\dfrac{\alpha}{\rho})}\hat{m}_{\delta,0}(\alpha)\\ m_{\delta,1}(0)=p_2(1-\alpha)\hat{m}_{\delta,0}(\alpha)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_2q_2^k\\ m_{\delta,0}(0)=p_1m_{\delta,1}(0)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_1q_1^k\end{cases}$$

通过解这个方程组，可以求出 $m_{\delta,0}(0)$，$m_{\delta,1}(0)$，$\hat{m}_{\delta,0}(\alpha)$，当 $\delta=0$ 时能求出：

$$m_1(0)=\frac{p_1q_2+(1-\alpha)p_2q_1}{p_1\alpha},m_0(0)=\frac{p_1q_2+(1-\alpha)p_2q_1}{\alpha}+q_1,\hat{m}_0(\alpha)=\frac{p_1q_2+p_2q_1}{p_1p_2\alpha}$$

其中 $m_0(0)$ 为当 $u=0$ 时的破产概率.

参考文献：

[1] GERBER H,SHIU E. On the time of ruin in a Sparre Andersen risk process [J]. North American Actuarial Journal 2005:9(2):49-84

[2] LI S,GARRIDO J. On ruin for the Erlang(n) risk process [J]. Insurance: Mathematic and Economics, 2004;34:391-408

[3] BAO Z. the expected discounted penalty at ruin in the risk process with random income [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006;179:559-566

[4] LI S. On a class of discrete time renewal risk models [J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2005(4):241-260

[5] HU Y,ZHANG ZH M. On a class of renewal risk model with random income [J]. Appl. Stochastic Models Bus. Ind,2009:25:678-695

On a Dual Risk Model with Random Income

PENG Zhi-guang

(College of Mathematics and Statistics,Chongqing University,Chongqing 400044,China)

Abstract: In this paper,we consider the dual version of renewal risk model with random income. In this dual model,the cumulative claims amount up to t follow a Possion process. The number of times of profit follows Erlang (2) distribution and earnings limit follows geometric distribution. Finally, we compute the ruin probability when the initial capital is zero.

Key words: discounted penalty function; generating function; the time to ruin

责任编辑：代晓红