文章编号:1672-058X(2011)02-0142-03

渐近周期点的若干性状*

邹 成[1] 赵清俊[2]

(1. 四川化工职业技术学院 基础部,四川 泸州 646005;2. 重庆文理学院 数学与统计学院,重庆 402160)

摘 要: f 为单位线段 I 上的连续自映射. $APer(f)$ 为它的渐近周期点集,通过比较和举例讨论了它的一些性状.

关键词: 单位区间; 点集; 渐近周期点; 性状

中图分类号: O193 **文献标志码:** A

连续自映射反复迭代生成的拓扑动力系统的研究真正开始于 20 世纪 30-40 年代,但近年来得到了蓬勃发展. 各种点集是一维动力系统中的重要内容,因为它在系统中具有很好的动力性质. 1964 年乌克兰数学家沙尔可夫斯基(sarkovskii)指出周期点的周期呈现出相当整齐的规律后,相当多的文献都对其进行了研究,并立即推广得到了几乎周期点、终于周期点、回归点、ω-极限点、非游荡点、链回归点等各类非游荡点集,同时诸多学者对它们的性质进行了大量讨论[1-7]. 但对于渐近周期点,却少有提及,此处则对渐近周期点的相关性状作一点探讨.

1 预备知识

记 $I=[0,1]$, $f: I\to I$ 是 $[0,1]$ 上的一个连续自映射. 以下预备知识引自文献[8]或[9].

定义 1 对任意 $x\in I$,若存在非负整数 n,使 $f^n(x)=x$,则称 x 为 f 的 n-周期点,n 为 f 的一个周期,f 的所有周期点构成集合记为 $P(f)$.

定义 2 $x\in I$ 称为 f 的终于周期点,如果 $\exists n>0$,使 $f^n(x)\in P(f)$, f 的所有终于周期点构成集合记为 $EP(f)$.

定义 3 $x\in I$ 称为 f 的几乎周期点,如果对于 x 的任意邻域 U,存在整数 $N>0$,使得在连接着的 N 个数中总有某一个 n 适合 $f^n(x)\in U$, f 的所有几乎周期点构成集合记为 $AP(f)$.

定义 4 $x\in I$ 称为 f 的渐近周期点,如果 $\exists p\in P(f)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(p)|=0$, f 的所有渐近周期点构成集合记为 $APer(f)$.

定义 5 $x\in I$ 称为回归点,如果对于 x 的任意邻域 U,存在非负整数 n,使 $f^n(x)\in U$,记为 $R(f)$.

定义 6 对于给定的 $x\in I$, $y\in I$ 称为 x 的 ω-极限点,如果序列 $\{f^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ 有一个收敛于 y 的子序列,x 的 ω-极限点集记作 $\omega(x,f)$,并记 f 的 ω-极限点集为 $W(f)=\cup_{x\in I}\omega(x,f)$.

定义 7 $x\in I$ 称为 f 的非游荡点,如果对于 x 的任意邻域 U,存在非负整数 n,使 $f^n(U)\cap U\neq\emptyset$. f 的非游荡点集记为 $\Omega(f)$.

显然有,$\Omega(f)\Leftrightarrow W(f)\Leftrightarrow R(f)\Leftrightarrow P(f)$.

定义 8 $\Lambda\in I$ 称为 f 的(强)不变子集,若 $f(\Lambda)\subset\Lambda(f(\Lambda)=\Lambda)$.

引理 9 若 $F\subset I$ 是一个区间,并且 $F\cap P(f)=\emptyset$,则必有下列之一:

(1) 对于任意的 $n>0$ 和任意的 $x\in F$,只要 $f^n(x)\in F$,则有 $f^n(x)>x$.

收稿日期:2010-05-14;修回日期:2010-06-20.

* 基金项目:重庆文理学院科研项目(y2008SJ33).

作者简介:邹成(1974-),男,四川宜宾人,讲师,硕士,从事拓扑动力系统方向的研究.

(2) 对于任意的 $n>0$ 和任意的 $x\in F$,只要 $f^n(x)\in F$,则有 $f^n(x)<x$.

称(1)的情形满足时,F 是一个正型区域;(2)的情形满足时,F 为负型区域.

2 主要结果

命题1 $P(f)\subset EP(f)\subset APer(f)$,显然成立.

命题2 在 I 上,f 的渐近周期点集 $APer(f)$ 是可迭代的,即 $APer(f)=APer(f^n)$,且 $APer(f)$ 是强不变集.

证明 显然有 $APer(f)\Leftrightarrow APer(f^n)$.

反之,若 $\forall x\in APer(f)$,则由渐近周期点的定义有 $\exists p\in P(f)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(p)|=0$,令 $n=ki+m$;k,m 为非负常数,$i=1,2,3,\cdots$;于是:

$$\lim_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(p)|=\lim_{i\to\infty}|f^{ki+m}(x)-f^{ki+m}(P)|=$$
$$\lim_{i\to\infty}|f^{ki}(f^m(x))-f^{ki}(f^m(p))|=0$$

故 $APer(f)\subset APer(f^n)$.立即得到 $APer(f)$ 是强不变集.

定理1 若 I 上 f 的周期点集为闭集,则有 $APer(f)=AP(f)=EP(f)=P(f)=R(f)$.

证明 i) I 上 f 的周期点集为闭集,则由文献[3],立即有 $P(f)=R(f)$.

ii) 证 $APer(f)=P(f)$.

反证法.设 x 即不是周期点,又不是周期点的聚点,$\exists y\in P(f)$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(y)|=0$,$\exists n_1,n_2,n_3,\cdots>n$,且 $f^{n_i}(x)\to f^{n_i}(y)$,取定一个端点 $f^{n_i}(y)=y'$,由序列 $f^{n_1}(x),f^{n_2}(x),f^{n_3}(x),\cdots,\to f^{n_i}(y)=y'$.于是 $\exists\varepsilon>0$,得到集合 $F=\{z\in APer(f)\mid |z-y'|<\varepsilon\}$.此时形成形如 (m,n) 的区域,也可能形成形如 $[m,n)$ 或 $(m,n]$ 的区域,无论如何,F 是一个区间,它里面没有周期点,其不是正型区域就是负型区域.

不妨设其为正型区域,则由上面可知,$\exists n_1>N$,使得 $f^{n_1}(x)\in F$,使 $f^{n_1}(x)>x$,且 $|f^{n_1}(x)-y'|<\delta<\varepsilon$.同理 $\exists n_2>n_1$,使 $f^{n_2}(x)>f^{n_1}(x)$,且 $|f^{n_2}(x)-y'|<\delta<\varepsilon$.令 $n=n_2-n_1>0$,$z=f^{n_1}(x)$,于是 $f^n(z)=f(f^{n_1}(x))=f^{n_2}(x)\in F$,这时 $f^n(z)=f^{n_2}(x)<z$.这与 F 是正型区域矛盾.故应有 $APer(f)=P(f)$.

iii) 再证 $EP(f)=P(f)$.

由文献[2]知,$R(f)\cap EP(f)=P(f)$,$EP(f)\Leftrightarrow P(f)$,而当 $P(f)$ 为闭集时,$P(f)=R(f)$,再由 $EP(f)\subset APer(f)$,故 $EP(f)=P(f)$.

iv) 最后证 $AP(f)=P(f)$.由文献[2]知,当 $R(f)$ 为闭集时,$AP(f)=R(f)$,立即得到 $AP(f)=P(f)$.

故周期点集为闭集时 $APer(f)=AP(f)=EP(f)=P(f)=R(f)$.

定理2 若 I 上 f 的周期点集为开集,则有 $APer(f)\supset\overline{P(f)}$.

证明 当 $\forall x\in P(f)$ 时显然成立.当 $\forall x\in\overline{P(f)}-P(f)$ 时,对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists y\in P(f)$,使 $|f^n(x)-f^n(y)|<\varepsilon(n\to\infty)$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(y)|=0$,得 $x\in APer(f)$,故 $APer(f)\supset\overline{P(f)}$.

命题3 若 I 上 f 的周期点集为开集,则 $APer(f)$ 与 $\Omega(f)$,$W(f)$,$R(f)$ 没有必然的包含关系.

证明起来是非常复杂的,见下反例:

设线段 $I=[0,1]$ 上的连续自映射 f 如图1,它满足下列条件:$f(a)=b$,$f(b)=b$,$f(x)$ 在 b 附近单调,且从斜率大于 -1 小于 0.

显然,对于一列非负整数 δ_i,$i=1,2,3,\cdots$;$f(a+\varepsilon)=b-\delta_1$;$f^2(a+\varepsilon)=b+\delta_2$;$f^3(a+\varepsilon)=b-\delta_3$;$\cdots$;$f^n(a+\varepsilon)=b+(-1)^n\delta_n$.且有 $\delta_{n+1}<\delta_n$,即有 $f^n(a+\varepsilon)\to f(b)=b$.

而这时显然对 $\forall n$,$\exists\varepsilon'>0$,有 $|f^n(a+\varepsilon)-a|>b-\delta_1-a>\varepsilon'$,故此时 a 为游荡点.而此时确有 $\lim\limits_{n\to\infty}|f^n(a)-f^n(b)|=0$,$a$ 却为渐近周期点.

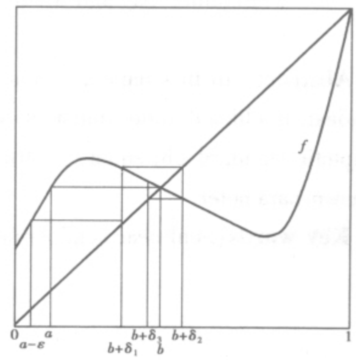

图1 线段 $I=[0,1]$ 上的连续自映射 f

参考文献:

[1] 张伟年.动力系统基础[M].北京:高等教育出版社,2001
[2] 周作领.符号动力系统[M].北京:上海科技教育出版社,1997
[3] 李继彬.混沌与 Melnikov 方法[M].重庆:重庆大学出版社,1989

[4] 熊金城,拓扑传递系统中的混沌[J]. 中国科学A辑·数学,2005.35(3):302-311
[5] 陈绥阳,褚蕾蕾. 动力系统基础及其方法[M]. 北京:科学出版社,2002
[6] 关鹏. 关于几乎周期点的讨论[J]. 河南科技大学学报,2007,28(5):76-78
[7] 范钦杰. 混沌与拓扑混合[J]. 大学数学,2004,20(6):68-72
[8] 熊金城. 线段自映射的动力系统:非游荡集、拓扑熵及混乱[J]. 数学进展,1988.17(1):1-11
[9] 周作领. 一维动力系统[J]. 数学月刊,1988,3(3):43-65

Several Properties of Asymptotic Periodic Point

ZOU Cheng[1], ZHAO Qing-jun[2]

(1. Department of Basic Science, Sichuan College of Chemical Technology, Sichuan Luzhou 646005, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Arts and Sciences,
Chongqing 402160, China)

Abstract: f is a continuous self-mapping on unit segment I, $APer(f)$ is its asymptotic periodic point set, and some of its properties are discussed by comparison and examples.

Key words: unit interval; point set; asymptotic periodic point; property

责任编辑:李翠薇

(上接第134页)

参考文献:

[1] OWEN A B. Empirical likelihood ratio confidence intervials for a single function[J]. Riometrika,1988,75:237-249
[2] OWNG A B. Empirical likelihood confidence regions[J]. Ann Statist,1990,18(1):90-120
[3] QIN J, LAWLESS J F. Empirical likelihood and general estimating equations[J]. Ann Statist,1994,22:300-325
[4] 罗旭. 半参数模型的经验欧氏似然估计的大样本性质[J]. 应用概率统计,1994,10(4):344-352
[5] 冯三营. 非线性半参数回归模型中参数的经验似然置信域[J]. 数学物理学报,2009,29A(5):1338-1349

Empirical Euclidean Likelihood Regions of the Parameters in Nonlinear Semiparametric Regression Models

FANG Lian-di

(Literature, Art and Media Department, Tongling University, Anhui Tongling 244000, China)

Abstract: In this paper, we consider the nonlinear semiparametric regression model and construct empirical Euclidean likelihood ratio statistics for the unkown parameters. It is shown that the proposed statistics has the asymptotic standard chi-square distribution, and hence it can be used to construct the confidence region of the unknown parameter.

Key words: nonlinear semiparametric regression model; empirical Euclidean likelihood; chi-square distribution

责任编辑:李翠薇