文章编号:1672 - 058X(2011)02 - 0135 - 03

一个关于函数不等式约束优化问题的算法

迟晓燕
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要:给出了一个关于函数不等式约束优化问题的计算方法,算法来源于 Jennings 和 Teo(1990). 首先,将非光滑的约束通过转换将其光滑化,得到了原问题的一个近似问题,并给出两个定理保证其解的可行性;接下来给出算法并通过数值算例验证了其有效性.

关键词:费用函数;光滑化;最优解;可行解
中图分类号:O224 文献标志码:A

1 问题引入

考虑这样一类优化问题,指标函数 $f(x)$ 被极小化,使得函数不等式约束 $g_i(x)\equiv\max\limits_{\omega\in\Omega}\phi_j(x,\omega)\leqslant 0, j=1, 2,\cdots,m$ 在紧集 Θ 上,$\Theta\in R^n$,向量 $x\in R^n$ 是一个参数向量,Ω 是实数域的一个紧区间,$\phi_j: R^n\times R\to R$ 关于 x 和 ω 是连续可微的. 以上问题记为问题(P).

2 问题近似

首先对函数不等式约束,应用与 Jennings 和 Teo(1990)[1] 相同的约束转换. 对每一个 $j=1,2,\cdots,m$,定义:

$$G_i(x)=\int_\Omega \max\{\phi_j(x,\omega),0\}\,\mathrm{d}\omega \tag{1}$$

因为 ϕ_j 关于 x 和 ω 是连续可微的,$\max\{\phi_j(x,\omega),0\}$ 是 ω 的连续函数,$\forall x\in R^n$,所以函数约束等价于:

$$G_i(x)=0; j=1,\cdots,m \tag{2}$$

方便起见,令问题(P)也定义为 $f(x)$ 关于式(2)的极小化问题. 令 F 为问题(P)可行域,定义:

$$F=\{x\in\theta: g_i(x)\leqslant 0; j=1,\cdots,m\}=\{x\in\theta: G_j(x)=0; j=1,\cdots,m\} \tag{3}$$

进而,令 $\mathrm{int}(F)$ 定义为 F 的内部,即

$$\mathrm{int}(F)=\{x\in\mathrm{int}(\theta): g_i(x)<0, j=1,\cdots,m\} \tag{4}$$

接下来给出如下假设:

1) $\mathrm{int}(F)\neq\varnothing$; 2) 对问题(P)的最优解 x^*,存在一个参数向量 $\bar{x}\in\mathrm{int}(F)$,使得 $\alpha\bar{x}+(1-\alpha)x^*\in\mathrm{int}(F)$,$\forall\alpha\in[0,1]$.

一般来讲,对每个 $j=1,\cdots,m$,$G_j(x)$ 在 x 处是光滑的,因此,标准优化方法来解这类等式约束是有一定困难的. 下面采用光滑方法,用 $g_{i,\varepsilon}(x,\omega)$ 来取代 $\max\{\phi_j(x,\omega),0\}$.

$$g_{j,\varepsilon}(x,\omega)=\begin{cases}0, & \text{if}\quad \phi_j(x,\omega)<-\varepsilon\\ \dfrac{(\phi_j(x,\omega)+\varepsilon)^2}{4\varepsilon}, & \text{if}\quad -\varepsilon\leqslant\phi_j(x,\omega)\leqslant-\varepsilon\\ \phi_j(x,\omega), & \text{if}\quad \phi_j(x,\omega)>-\varepsilon\end{cases} \tag{5}$$

收稿日期:2010 - 10 - 10;修回日期:2010 - 11 - 20.

作者简介:迟晓燕(1984 -),女,山东青岛人,硕士研究生,从事优化控制研究.

这种光滑化方法在以前的文章中已被采用过. 对每个$j=1,\cdots,m$,定义:

$$G_{j,\varepsilon}=\int_{\Omega}g_{j,\varepsilon}(x,\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{6}$$

对任意$j=1,\cdots,m$,$g_{j,\varepsilon}(x,\omega)$关于$x$是连续可微的. 令:

$$F_{\varepsilon}=\{x\in\theta: G_{j,\varepsilon}=0;j=1,\cdots,m\}=\{x\in\theta:\phi_j(x,\omega)\leqslant-\varepsilon;j=1,\cdots,m,\omega\in\Omega\} \tag{7}$$

易知:$F_{\varepsilon}\subset F$,$\forall\varepsilon>0$.

现在定义一个近似问题($\mathrm{P}_{\varepsilon,\gamma}$). $\forall\gamma>0$,$X\in\theta$,最小化费用函数:

$$f(x)+\gamma\sum_{j=1}^{m}G_{j,\varepsilon}(x) \tag{8}$$

以下结果保证了($\mathrm{P}_{\varepsilon,\gamma}$)关于(P)的解的可行性.

定理1 $\exists\gamma(\varepsilon)>0$[2],使得对所有$\gamma>\gamma(\varepsilon)$,对问题($\mathrm{P}_{\varepsilon,\gamma}$)的任何解也是问题(P)的可行点.

证明 令$x^*_{\varepsilon,\gamma}$为($\mathrm{P}_{\varepsilon,\gamma}$)的最优解,则:

$$f(x^*_{\varepsilon,\gamma})+\gamma\sum_{j=1}^{m}G_{j,\varepsilon}(x^*_{\varepsilon,\gamma})\leqslant f(x)+\gamma\sum_{j=1}^{m}G_{j,\varepsilon}(x) \tag{9}$$

对所有$x\in\theta$,固定$x_{\varepsilon}\in F_{\varepsilon}$,由$G_{j,\varepsilon}$定义知,$G_{j,\varepsilon}=0;j=1,\cdots,m$. 因为$\theta$为紧的且$f$为连续的,存在一个$\bar{x}\in\theta$,使得$f(\bar{x})\leqslant f(x)$,$\forall x\in\theta$. 易知$f(\bar{x})\leqslant f(x^*_{\varepsilon,\gamma})$. 两边同时增加罚条件[3],由$x_{\varepsilon}$定义和式(9)可得:

$$f(\bar{x})+\gamma\sum_{j=1}^{m}G_{j,\varepsilon}(x^*_{\varepsilon,\gamma})\leqslant f(x^*_{\varepsilon,\gamma})+\gamma\sum_{j=1}^{m}G_{j,\varepsilon}(x^*_{\varepsilon,\gamma})\leqslant f(x_{\varepsilon}) \tag{10}$$

整理得:

$$\gamma\sum_{j=1}^{m}G_{j,\varepsilon}(x^*_{\varepsilon,\gamma})\leqslant f(x_{\varepsilon})-f(\bar{x}) \tag{11}$$

令$z=f(x_{\varepsilon})-f(\bar{x})$,则式(11)变形为$\sum_{j=1}^{m}G_{j,\varepsilon}(x^*_{\varepsilon,\gamma})\leqslant\dfrac{z}{\gamma}$.

Jennings 和 Teo 已经给出了证明:$\forall\varepsilon$,$\exists\tau(\varepsilon)$,使得对所有$0<\tau<\tau(\varepsilon)$,如果$G_{j,\varepsilon}(x)<\tau$,则$x\in F$. 因此,通过选择$\gamma(\varepsilon)\geqslant\dfrac{z}{\tau(\varepsilon)}$,可得,对所有的$\gamma>\gamma(\varepsilon)$,$\sum_{j=1}^{m}G_{j,\varepsilon}(x^*_{\varepsilon,\gamma})<\tau$,因此$G_{j,\varepsilon}(x^*_{\varepsilon,\gamma})<\tau;j=1,\cdots,m$且$x^*_{\varepsilon,\gamma}\in F$. 证毕.

定理2 令x^*,$x^*_{\varepsilon,\gamma}$分别为(P)和($\mathrm{P}_{\varepsilon,\gamma}$)的一个最优解,选择恰当的$\gamma$,确保$x^*_{\varepsilon,\gamma}\in F$,则$\lim\limits_{\varepsilon\to0}f(x^*_{\varepsilon,\gamma})=f(x^*)$.

证明 由假设(2),存在一个$\bar{x}\in\mathrm{int}(F)$,使得$x_{\alpha}=\alpha\bar{x}+(1-\alpha)x^*=x^*+\alpha(\bar{x}-x^*)\in\mathrm{int}(F)$,对所有的$\alpha\in(0,1]$. $\forall\delta_1>0$,存在$\alpha\in(0,1]$,使得:

$$f(x^*)\leqslant f(x_{\alpha})\leqslant f(x^*)+\delta_1 \tag{12}$$

对所有的$\alpha\in(0,\alpha_1)$,选择$\alpha_2=\dfrac{\alpha_1}{2}$,则易知$x_{\alpha_2}\in\mathrm{int}(F)$. 因此存在$\delta_2>0$,使得$\max\limits_{\omega\in\Omega}\phi_j(x_{\alpha_2},\omega)<-\delta_2;j=1,\cdots,m$. 如果选择$\varepsilon=\delta_2$,则$x_{\alpha_2}$满足$G_{j,\varepsilon}(x_{\alpha_2})=0;j=1,\cdots m$. 凭此和$x^*_{\varepsilon,\gamma}$的定义,有$f(x^*_{\varepsilon,\gamma})+\gamma\sum_{j=1}^{m}G_{j,\varepsilon}(x^*_{\varepsilon,\gamma})\leqslant f(x_{\alpha_2})+\gamma\sum_{j=1}^{m}G_{j,\varepsilon}(x_{\alpha_2})=f(x_{\alpha_2})$. 注意到罚条件是非负的,有$f(x^*_{\varepsilon,\gamma})\leqslant f(x_{\alpha_2})$. 由式(12)和(P)的可行解$x^*_{\varepsilon,\gamma}$,发现$f(x^*)\leqslant f(x^*_{\varepsilon,\gamma})\leqslant f(x^*)+\delta_1$,当$\varepsilon\to0$且任意的$\delta_1>0$,结论得证.

3 算 法

基于前面两个结论,给出解决问题(P)的算法.

1) 选择$\varepsilon=10^{-1}$,$\gamma=1$且初始点$x\in\theta$[4];2) 由精确度$\max\{10^{-8},\varepsilon10^{-3}\}$,求解($P_{\varepsilon,\gamma}$),给出$x^*_{\varepsilon,\gamma}$;3) 对所有$j=1,\cdots,m$,检验$\phi_j(x^*_{\varepsilon,\gamma},\omega)\leqslant0$的可行性,如果$x^*_{\varepsilon,\gamma}$是可行解,跳至第4)步,否则,令$\gamma=2\gamma$,若$\gamma>10^5$,则非正常退出,否则跳至第2)步,使用$x^*_{\varepsilon,\gamma}$作为下一步的初始点;4) 令$\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{10}$,如果$\varepsilon>10^{-7}$,跳至第2)步,使用$x^*_{\varepsilon,\gamma}$作为下一步的初始点,否则成功退出.

4 数值计算

例 1　$\min f(x) = \dfrac{x_2(122+17x_1+6x_3-5x_2+x_1x_3)+180x_3-36x_1+1224}{x_2(408+56x_1-50x_2+60x_3+10x_1x_3-2x_1^2)}$，s. t. $g(x) = \max\limits_{\omega\in\Omega}\phi(x,\omega) \leqslant 0$，这里 $\phi(x,\omega) = \Im T(x,\omega) - 3.33(RT(x,\omega))^2 + 1$，$T(x,\omega) = 1 + H(x,\mathrm{i}\omega)G(\mathrm{i}\omega)$，$H(x,s) = x_1 + \dfrac{x_2}{s} + x_3 s$，$G(s) = \dfrac{1}{(s+3)(s^2+2s+2)}$，$\Omega = [10^{-6},30]$，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

以简单的边界形式给出普通等式约束[5]，$0 \leqslant x_1 \leqslant 100$，$0.1 < x_2 \leqslant 100$，$0 \leqslant x_3 \leqslant 100$.

应用以上算法，给出如下结果(表 1)：

表 1　计算结果

ε	γ	$\bar{\omega}$	g	f	x_1	x_2	x_3	n_f
10^{-1}	1.0	5.48	6.7×10^{-2}	0.182 272 3	16.181 85	48.866 07	32.071 44	21
10^{-2}	1.0	5.48	6.7×10^{-2}	0.182 272 3	16.181 85	48.866 07	32.071 44	1
10^{-3}	1.0	5.63	6.2×10^{-4}	0.174 727 7	17.572 67	48.633 36	34.446 01	11
10^{-3}	2.0	5.63	7.3×10^{-5}	0.1748 006	17.554 90	48. 633 05	32.421 06	4
10^{-4}	2.0	5.63	8.7×10^{-6}	0.1747 937	17.555 97	48.632 78	32.423 70	3
10^{-5}	2.0	5.69	3.7×10^{-4}	0.1746 830	16.535 37	48.111 78	35.016 57	17
10^{-6}	2.0	5.69	3.7×10^{-4}	0.1746 830	16.535 38	48.111 78	35.016 58	4
10^{-7}	2.0	5.69	3.7×10^{-4}	0.1746 830	16.535 41	48.111 73	35.016 57	6

参考文献:

[1] JENNINGS L S, TEO K L. A computational algorithm for functional inequality constrained optimization problem [J]. Automatica, 1990, 126(2): 371-375

[2] BERTSKAS D P. Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods [M]. New York: Academic Press, 1982

[3] BURKE J V. An exact penalization viewpoint of constrained optimization [J]. SIAM J. Control and Optimization, 1991. 29: 968-998

[4] 曾波，龙茜. 无约束最大子序列求和改进算法 [J]. 重庆工商大学学: 自然科学版, 2007, 24(6): 600-602

[5] LUENBURGER D G. Linear and Nonlinear Programming [M]. New York: Addison-Wesley, 1984

An Algorithm on Optimization Problems with Functional Inequality Constraints

CHI Xiao-yan

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper gives an algorithm on optimization problems with functional inequality constraints from Jennings and Teo(1990). Firstly, the constraints of non-smooth are converted to graduation to get an approximation solution of original problem and two theorems are given to guarantee the feasibility of the solution. Then algorithms are presented and the effectiveness of the algorithms is verified by numerical examples.

Key words: cost function; graduation; optimal solution; feasible solution

责任编辑: 李翠薇