**文章编号:** 1672 - 058X(2011)02 - 0122 - 03

# 一类平面图的强边着色

**薄朝升,谢德政***

(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

**摘 要:** 图 $G$ 的强边着色是正常边着色且任何长为 3 的路的边不着双色. 图 $G$ 的强边色数是 $G$ 的所有强边着色中使用色数的最小者,记为 $\chi'_s(G)$. 证明了如果图 $G$ 是平面图且满足 $g(G) \geqslant 14$,则 $\chi'_s(G) \leqslant \left\lfloor \frac{5\Delta^2 - 2\Delta + 1}{4} \right\rfloor$,其中 $g(G)$ 表示图 $G$ 的围长.

**关键词:** 强边着色; 边着色; 平面图

**中图分类号:** O157.15 **文献标志码:** A

考虑的图均为无向简单有限图. 图 $G$ 的强边着色是正常边着色且任何长为 3 的路的边不着双色. 图 $G$ 的强边色数是 $G$ 的所有强边着色中使用色数的最小者,记为 $\chi'_s(G)$.

Erdös 和 Nestril [1] 提出以下猜想(强边着色猜想):对任意图 $G$,

$$\chi'_s(G) \leqslant \begin{cases} \frac{5\Delta^2}{4} & (\Delta \text{ 为偶数时}) \\ \frac{5\Delta^2 - 2\Delta + 1}{4} & (\Delta \text{ 为奇数时}) \end{cases}$$

对于 $\Delta = 3$ 的图,强边着色猜想已被证明 [2,3]. Horak [4] 证明了对于 $\Delta = 4$ 的图,$\chi'_s(G) \leqslant 23$; Cranston [5] 利用时间序列算法证明了对于 $\Delta = 4$ 的图,$\chi'_s(G) \leqslant 22$.

**引理 1** [6] 设 $G$ 是一个围长为 $g$ 的平面图,那么 $\mathrm{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$. 其中,$\mathrm{mad}(G)$ 表示图 $G$ 的最大平均度,且 $\mathrm{mad}(G) = \max\{2\frac{|E(H)|}{|V(H)|} : H \subseteq G\}$.

度为 $k$ 的点称为 $k$ - 点; 度不小于 $k$ 的点称为 $k^+$ - 点. 设 $p$ 是一条长为 $k+1$ 的路,且其所有的内点(一条路中,除了起点和终点以外的点为内点)均为 2 - 点,把这样的路称为 $k$ - 线. $k_{(i_1, i_2, \cdots, i_k)}$ - 点是指一个 $k$ - 点,且每条以该点为起点的线分别有 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 个内点,其中 $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k$. 对于 $G$ 中任意边 $e$,$c(e)$ 表示 $e$ 的颜色; 对于 $G$ 中任意点 $u$,$c(u)$ 表示与 $u$ 相关联的所有边的颜色的集合,即 $c(u) = \{c(uv): v \text{ 是 } u \text{ 的邻点}\}$. 其他相关概念请参考文献 [7] [8].

**定理 1** 设图 $G$ 是平面图且满足 $g(G) \geqslant 14$,则 $\chi'_s(G) \leqslant \left[\frac{5\Delta^2 - 2\Delta + 1}{4}\right]$.

**证明** 当 $\Delta = 2$ 时,$G$ 是一个圈或是一条路,显然有 $\chi'_s(G) \leqslant \left[\frac{5\Delta^2 - 2\Delta + 1}{4}\right]$ 成立. 下面考虑 $\Delta \geqslant 3$ 的情况.

设图 $G$ 是一个满足定理条件且含有最少边的反例($\Delta \geqslant 3$). 则对于 $G$ 有以下断言成立:

**断言 1** $G$ 不含有 1 - 点.

---

收稿日期: 2010 - 09 - 18; 修回日期: 2010 - 10 - 09.

作者简介: 薄朝升(1982-),男,河北邯郸人,硕士研究生,从事图论及其应用的研究.

* 通讯作者: 谢德政(1956-),男,重庆市人,教授,从事图论及其应用的研究.

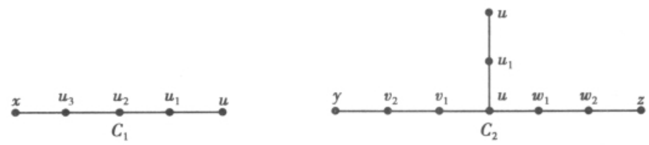


图1　$G$

假设 $G$ 含有 $1-$点 $u$，$v$ 是 $u$ 的邻点. 设 $G'=G-uv$. 由 $G$ 的极小性可知，使用$\left[\frac{5\Delta^2-2\Delta+1}{4}\right]$种颜色可以完成对 $G'$ 的一个强边着色. 现在对 $uv$ 着色，最多只需避开 $\Delta(\Delta-1)$ 种颜色，而 $\Delta(\Delta-1)+1\leqslant\left[\frac{5\Delta^2-2\Delta+1}{4}\right]$，故可完成对 $G$ 的一个强边着色，矛盾.

断言 2　$G$ 不含有 $2_{(1,1)}-$点.

假设 $G$ 中含有 $2_{(1,1)}-$点 $u$(如图 1($C_1$)). 设 $G'=G-u_1u_2$. 由 $G$ 的极小性可知，使用$\left[\frac{5\Delta^2-2\Delta+1}{4}\right]$种颜色可以完成对 $G'$ 的一个强边着色. 若 $c(uu_1)\neq c(u_2u_3)$，对 $u_1u_2$ 着色，只需避开 $c(u)\cup c(u_3)$ 中的颜色，而$|c(u)\cup c(u_3)|\leqslant\Delta+2$，故存在颜色可用于对 $u_1u_2$ 的着色. 从而，可完成对 $G$ 的一个强边着色，与 $G$ 是反例矛盾. 若 $c(uu_1)=c(u_2u_3)=c$，要想完成对 $G$ 的强边着色，首先要对 $u_2u_3$ 重新着色，使得 $c'(u_2u_3)\neq c(uu_1)$(其中 $c'(u_2u_3)$ 是 $u_2u_3$ 重新着色后的颜色)，从而，与上面类似，可完成对 $G$ 的一个强边着色. 下面对 $u_2u_3$ 重新着色，只需避开 $c(x)\cup\{c\}$ 中的颜色即可. 而$|c(x)\cup\{c\}|\leqslant\Delta+1$，故存在颜色可用于对 $u_2u_3$ 的重新着色，且使得 $c(uu_1)\neq c'(u_2u_3)$. 从而，可完成对 $G$ 的一个强边着色，矛盾.

断言 3　$G$ 不含有 $3_{(1,2,2)}-$点.

假设 $G$ 含有此类构图(如图 1($C_2$)). 设 $G'=G'-uu_1$，则 $\chi'_s(G')\leqslant\left[\frac{5\Delta^2-2\Delta+1}{4}\right]$. 若 $c(u_1x)\notin\{c(uv_1),c(uw_1)\}$，要对 $uu_1$ 着色，需避开 $c(x)\cup c(v_1)\cup c(w_1)$ 中的颜色. 而$|c(x)\cup c(v_1)\cup c(w_1)|\leqslant2\Delta+1$，故至少有 3 种颜色可用于对 $uu_1$ 的着色，从而完成了对 $G$ 的一个强边着色，矛盾. 若 $c(u_1x)\in\{c(uv_1),c(uw_1)\}$，不妨设 $c(u_1x)=c(uv_1)=c$. 首先对 $uv_1$ 重新着色，只需避开 $c(v_2)\cup c(w_1)\cup\{c\}$ 中的颜色，显然，存在颜色 $c'$ 可用于对 $uv_1$ 的重新着色，且使得 $c(u_1x)\notin\{c'(uv_1),c(uw_1)\}$. 从而，与上面类似，可完成对 $G$ 的一个强边着色，矛盾.

综上，极小反例 $G$ 不包含断言 1－3 的构图.

现在对 $G$ 中的任意点赋值，赋值函数为 $ch$，设 $ch(u)=d(u)-\frac{7}{3}(u\in V(G))$. 由引理 1 知，$\mathrm{mad}(G)<\frac{7}{3}$，所以有 $\sum\limits_{u\in V(G)}ch(u)<0$. 下面给出重新分配赋值的法则：

R1 每一个 $2_{(0,0)}-$点从每个邻点得到赋值$\frac{1}{6}$；R2 每一个 $2_{(0,1)}-$点从其 $3^+-$邻点得到赋值$\frac{1}{3}$.

现在按照法则 R1 和 R2，对 $G$ 中的任意点重新赋值，设新的赋值函数为 $ch'$，则有以下情况：

情况 1　$u$ 是一个 $2-$点.

显然，$ch(u)=2-\frac{7}{3}=-\frac{1}{3}$. 由断言 2 知，$u$ 不是 $2_{(1,1)}-$点. 若 $u$ 是一个 $2_{(0,0)}-$点，则由 R1 可知，$u$ 从每个邻点得到$\frac{1}{6}$，于是有 $ch'(u)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times2\geqslant0$. 若 $u$ 是一个 $2_{(0,1)}-$点，则由 R2 可知，$u$ 从其 $3^+-$邻点得到$\frac{1}{3}$，于是有 $ch'(u)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\geqslant0$.

情况 2　$u$ 是一个 $3-$点.

显然，$ch(u)=3-\frac{7}{3}=\frac{2}{3}$. 由断言 3 知，$u$ 不能同时与两个 $2_{(0,1)}-$点和一个 $2_{(0,0)}-$点分别相邻. 若 $u$ 是

一个$3_{(0,2,2)}$－点,由R2知,$u$需要对其两个$2_{(0,1)}$－邻点分别分配赋值$\frac{1}{3}$,于是有,$ch'(u)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\times 2\geqslant 0$. 若$u$是一个$3_{(1,1,2)}$－点,由R1和R2知,$ch'(u)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\times 2\geqslant 0$.

情况3 $u$是一个$4^+$－点.

显然有,$ch(u)=d(u)-\frac{7}{3}=\frac{3d(u)-7}{3}$. 由断言1知,$u$最多与$d(u)$个$2_{(0,1)}$－点相邻. 由于此时$d(u)\geqslant 4$,则$ch'(u)\geqslant\frac{3d(u)-7}{3}-\frac{1}{3}d(u)=\frac{2d(u)-7}{3}>0$.

综上3种情况可知,$0>\sum_{u\in V(G)}ch(u)=\sum_{u\in V(G)}ch'(u)\geqslant 0$.

因此,使用$\left[\frac{5\Delta^2-2\Delta+1}{4}\right]$种颜色可以完成对满足定理条件的任意图$G$的一个强边着色. 又易知$\left[\frac{5\Delta^2-2\Delta+1}{4}\right]\leqslant\frac{5\Delta^2}{4}$. 故对满足定理条件的任意图$G$强边着色猜想成立. 证毕.

## 参考文献:


[1] ERDOS P,NESETRIL J. Problem. In: G. Halsz and V. T. Sos,Editors,Irregularities of Partitions[M]. New York: Springer,1989
[2] ANDERSEN L A. The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10[J]. Discrete Math,1992,108(1-3):231-252
[3] HORAK P,QING H,TROTTER W T. Induced matching in cubic graphs[J]. J Graph Theory,1993,17:151-160
[4] HORAK P. The strong chromatic index of graphs with maximum degree four[J]. Conterp Methods Graphs Theory,1990(8):399-403
[5] CRANSTON C. Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4 using 22 colors[J]. Discrete Math,2006,306:2772-2778
[6] MONTASSIER M,OCHEM P,RASPAUD A. On the acyclic choosability of graphs[J]. J Graph Theory,2006,51:281-300
[7] BONDY J A,MURTY U S R. Graph Theory[M]. Berlin: Springer,2008
[8] 张卫标,杨清军. 关于强边着色猜想的最优图问题[J]. 重庆工学院学报,2009,26(6):538-547


# Strong Edge Coloring of a Class of Planar Graphs


**BO Chao-sheng,XIE De-zheng**

(College of Mathematics and Statistics,Chongqing University,Chongqing 401331,China)



**Abstract:** A strong edge coloring of a graph $G$ is a proper edge coloring such that no two edges with the same color lie on a path of length 3. The strong edge chromatic number of $G$ is the smallest number of colors required to obtain a strong edge coloring of $G$,denoted by $\chi'_s(G)$. We prove that if graph $G$ is planar and $g(G)\geqslant 14$,then $\chi'_s(G)\leqslant\left[\frac{5\Delta^2-2\Delta+1}{4}\right]$ colors, $g(G)$ indicate the girth of $G$.



**Key words:** strong edge coloring; edge coloring; planar graphs

责任编辑:李翠薇