第 28 卷第 2 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2011 年 4 月
Vol. 28 NO. 2 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Apr. 2010

文章编号:1672 -058X(2011)02 -0119 -03

关于两个有穷级整函数的唯一性

夏 生 虎
(重庆大学 数理学院,重庆 400044)

摘 要: 应用 NevanLinna 第二基本定理,整函数级的性质,讨论了有穷级整函数唯一性,在涉及重级的情况下得到到了已知定理的推广.

关键词: 整函数; 唯一性; 有穷级
中图分类号: O174.5 **文献标志码:** A

设 f 表示一个开平面上的非常数整函数,采用亚纯函数 NevanLinna 理论的标准记号,特别地,用 $S(r,f)$ 表示任意满足 $S(r,f) = O\{T(r,f)(r\to\infty, r\notin E)\}$ 的量,其中 E 是一个有穷线性测度集.

设 k 为正整数,以$\overline{N_{k)}}\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$表示在$|z|\leqslant r$ 上$f(z)-a$ 的重级不超过 k 的零点数目,重级零点仅记一次,相应的计数函数记为$\overline{N_{k)}}\left(\dfrac{1}{f-a}\right)$;设 a 为任一复数,用 $f=a\rightleftarrows g=a$ 表示 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 的零点相同,而且每个零点重级相同,以$\overline{E_{k)}}(a,f)$ 表示 $f(z)-a$ 的重级不超过 k 的零点集合,重级零点仅计一次;用$n_k\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$表示在 $|z|\leqslant r$ 上 $f(z)-a$ 的零点个数,重数 $m<k$ 计其重数,重数 $m\geqslant k$ 时计 $k+1$ 次,相应的计数函数记为$N_k\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$.

定义: $\delta_k(a,f) = 1-\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{N_k\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}$,显然有 $1\geqslant\Theta(a,f)\geqslant\delta_1(a,f)\geqslant\delta_2(a,f)\geqslant\cdots\geqslant\delta(a,f)\geqslant 0$.

对有穷级整函数,仪洪勋证明了:

定理 1 [1] 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为非常数整函数,$f(x)$ 的级 $\lambda(f)$ 为有穷非整数,且 $f=0\rightleftarrows g=0$. 如果存在两个判别的有穷非零的复数 a_1, a_2,满足$\overline{E_{1)}}(a_j,f)=\overline{E_{1)}}(a_j,g)$, $j=1,2$ 及 $\max\{\Theta(0,f),\delta(a_1,f),\delta(a_2,f)\}>0$,则 $f(z)\equiv g(z)$.

定理 2 [1] 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为非常数整函数,$f(z)$ 的级 $\lambda(f)$ 为有穷非整数,且 $f=0\rightleftarrows g=0$. 如果存在两个判别的有穷非零复数 a_1, a_2,满足$\overline{E_{k_j)}}(a_j,f)=\overline{E_{k_j)}}(a_j,g)$, $j=1,2$,其中 $k_1\geqslant 1, k_2\geqslant 2$,则 $f(z)\equiv g(z)$.

林伟川,吕巍然证明了:

定理 3 [2] 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为非常数整函数,$g(z)$ 的级 $\lambda(g)$ 为有穷非整数,且 $f=0\rightleftarrows g=0$. 如果存在两个判别的有穷非零的复数 a_1, a_2,满足$\overline{E_{1)}}(a_j,f)\subseteq\overline{E_{1)}}(a_j,g)$, $j=1,2$ 及 $\max\{\Theta(0,f),\delta_2(a_1,f),\delta_2(a_2,f)\}>0$,则 $f(z)\equiv g(z)$.

定理 4 [2] 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为非常数整函数,$g(z)$ 的级 $\lambda(g)$ 为有穷非整数,且 $f=0\rightleftarrows g=0$. 如果存在两个判别的有穷非零的复数 a_1, a_2,且满足$\overline{E_{k_j)}}(a_j,f)\subseteq\overline{E_{k_j)}}(a_j,g)$, $j=1,2$,其中 $k_1+k_2\geqslant 3$,则 $f(z)\equiv g(z)$.

1 主要结果

在改进上述定理的情况下,得到下列结果:

收稿日期:2010 -06 -17;修回日期:2010 -07 -30.

作者简介:夏生虎(1983 -),男,安徽无为人,硕士研究生,从事亚纯函数与唯一性研究.

定理5 设$f(x)$与$g(x)$为非常数整函数,$g(z)$的级$\lambda(g)$为有穷非整数,且$f=0\rightleftarrows g=0$. 如果存在n个判别的有穷非零复数$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$满足$\overline{E_{k_j)}}(a_j,f)\subseteq\overline{E_{k_j)}}(a_j,g)$,$j=1,2,\cdots,n$及$\Theta(0,f)+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j+1}\delta_{k_j+1}(a_j,f)>1-\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_j+1}(n\geqslant 2)$,则$f(z)\equiv g(z)$.

定理6 设$f(x)$与$g(x)$为非常数整函数,$g(z)$的级$\lambda(g)$为有穷非整数,且$f=0\rightleftarrows g=0$. 如果存在n个判别的有穷非零复数$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$满足$\overline{E_{k_j)}}(a_j,f)\subseteq\overline{E}_{k_j)}(a_j,g)$,$j=1,2,\cdots,n$及$\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_j+1}>1(n\geqslant 3)$,则$f(z)\equiv g(z)$.

2 引理

引理1 设$f(z)$与$g(z)$为开平面上非常数亚纯函数,其级分别为$\lambda(f)$与$\lambda(g)$,如果$\lambda(f)<\lambda(g)$,则$\lambda(fg)=\lambda(g)$,$\lambda(f+g)=\lambda(g)$.

引理2[3] 设$h(z)$为非常数整函数,$f(z)=e^{h(z)}$,且$f(z)$的级为λ,下级为μ.

i) 若$h(z)$为P次多项式,则$\lambda=\mu=P$; ii) 若$h(z)$为超越整函数,则$\lambda=\mu=\infty$.

引理3 设$f(z)$与$g(z)$为开平面上的非常数亚纯函数,其级分别为$\lambda(f)$与$\lambda(g)$,则$\lambda(fg)\leqslant\max\{\lambda(f),\lambda(g)\}$,$\lambda(f+g)\leqslant\max\{\lambda(f),\lambda(g)\}$.

引理4 设$f(x)$与$g(x)$为非常数整函数,$g(z)$的级$\lambda(g)$为有穷非整数,且$f=0\rightleftarrows g=0$. 如果存在两个判别的有穷非零复数a_1,a_2,满足$\overline{E_{1)}}(a_j,f)\subseteq\overline{E_{1)}}(a_j,g)$,$j=1,2$,则$\lambda\left(\frac{f}{g}\right)<\lambda(f)=\lambda(g)$.

证明 由NevanLinna第二基本定理得:

$$\begin{aligned}2T(r,f)\leqslant&\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f-a_1})+\overline{N}(r,\frac{1}{f-a_2})+S(r,f)\leqslant\\&\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\frac{1}{2}\overline{N_{1)}}(r,\frac{1}{f-a_1})+\frac{1}{2}N(r,\frac{1}{f-a_1})+\frac{1}{2}\overline{N_{1)}}(r,\frac{1}{f-a_2})+\frac{1}{2}N(r,\frac{1}{f-a_2})+S(r,f)\leqslant\\&\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\frac{1}{2}\overline{N_{1)}}(r,\frac{1}{f-a_1})+\frac{1}{2}\overline{N_{1)}}(r,\frac{1}{f-a_2})+T(r,f)+S(r,f)\end{aligned}\tag{1}$$

结合引理的条件,由式(1)得:

$$T(r,f)\leqslant\overline{N}(r,\frac{1}{g})+\frac{1}{2}\overline{N_{1)}}(r,\frac{1}{g-a_1})+\frac{1}{2}\overline{N_{1)}}(r,\frac{1}{g-a_2})+S(r,f)\leqslant 2T(r,g)+S(r,f)\tag{2}$$

由于$g(z)$的级$\lambda(g)$为有穷非整数,故由式(2)可推得:

$$\lambda(f)<\infty,\lambda(f)\leqslant\lambda(g)\tag{3}$$

下面分两种情况讨论.

①若$f(z)\equiv g(z)$,则$\lambda(f)=\lambda(g)$,引理成立.

②若$f(z)$不恒等于$g(z)$,设:

$$\frac{g(z)}{f(z)}=F(z)\tag{4}$$

由$f=0\rightleftarrows g=0$得$F(z)=e^{h(z)}$,其中$h(z)$为整函数,利用引理2,即得$\lambda(e^h)$为整数,同时由式(4)及引理(3)可得:

$$\lambda(e^h)\leqslant\max\{\lambda(f),\lambda(g)\}=\lambda(g)\tag{5}$$

由于$\lambda(g)$为有穷非整数,所以$\lambda(e^h)<\lambda(g)$ 由引理(1)得:

$$\lambda(e^h)<\lambda(f)=\lambda(g)\tag{6}$$

3 定理的证明

定理5的证明 假设$f(z)$不恒等于$g(z)$,根据定理条件及引理4与式(4)(6)可得:

$$\lambda(e^h)<\lambda(f)=\lambda(g)\tag{7}$$

设$\{z_n\}$是满足$\{z_n\}\subseteq\overline{N_{k_j)}}(a_j,f)$的集合,则由$\overline{E_{k_j)}}(a_j,f)\subseteq\overline{E_{k_j)}}(a_j,g)$得$\{z_n\}\subseteq\overline{N_{k_j)}}(a_j,g)$,于是由式(4)得$e^{h(z_n)}=1$,易得:

$$\overline{N_{k_j)}}(r,\frac{1}{f-a_j})\leqslant N(r,\frac{1}{e^h-1})\leqslant T(r,e^h)+O(1) \tag{8}$$

另一方面,对$j=1,2,3,\cdots,n$,有:

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f-a_j})\leqslant\frac{k_j}{k_j+1}\overline{N_{k_j)}}(r,\frac{1}{f-a_j})+\frac{1}{k_j+1}N_{k_j+1}(r,\frac{1}{f-a_j}) \tag{9}$$

运用 NevanLinna 第二基本定理及式(8)(9)得: $nT(r,f)\leqslant\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\sum_{j=1}^{n}\overline{N}(r,\frac{1}{f-a_j})+S(r,f)\leqslant\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_j+1}\overline{N_{k_j)}}(r,\frac{1}{f-a_j})+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j+1}N_{k_j+1}(r,\frac{1}{f-a_j})+S(r,f)\leqslant\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_j+1}T(r,e^h)+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j+1}N_{k_j+1}(r,\frac{1}{f-a_j})+S(r,f)$,于是得到$[n-1+\Theta(0,f)+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j+1}\delta_{k_j+1}(a_j,f)-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j+1}+O(1)]T(r,f)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_j+1}T(r,e^h)$ 即$[\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_j+1}-1+\Theta(0,f)+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j+1}\delta_{k_j+1}(a_j,f)+O(1)]T(r,f)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_j+1}T(r,e^h)$结合定理的条件得到$\lambda(f)\leqslant\lambda(e^h)$,与式(7)矛盾,于是证明了$f(z)\equiv g(z)$.

定理 6 的证明　由定理 1 的证明得:

$$\lambda(e^h)<\lambda(f)=\lambda(g) \tag{10}$$

$$\overline{N_{k_j)}}(r,\frac{1}{f-a_j})\leqslant N(r,\frac{1}{e^h-1})\leqslant T(r,e^h)+O(1) \tag{11}$$

运用 NevanLinna 第二基本定理及式(9)(11)得: $nT(r,f)\leqslant\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\sum_{j=1}^{n}\overline{N}(r,\frac{1}{f-a_j})+S(r,f)\leqslant\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_j+1}\overline{N_{k_j)}}(r,\frac{1}{f-a_j})+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j+1}N_{k_j+1}(r,\frac{1}{f-a_j})+S(r,f)\leqslant(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j+1}+1)$,于是得到:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_j+1}-1\right)T(r,f)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_j+1}T(r,e^h)+S(r,f) \tag{12}$$

由于$\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_j+1}>1$,由式(13)得$\lambda(f)\leqslant\lambda(e^h)$,与式(10)矛盾,证明了$f(z)\equiv g(z)$.

参考文献:

[1] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社,1995
[2] 林伟川,吕巍然. 有穷级整函数的唯一性[J]. 福建师范大学学报,2001(2): 6-9
[3] HAYMAN W. Meromorphic Functions [M]. Oxford,1964

Unicity Theorems for Two Entire Functions of Finite Order

XIA Sheng-hu

(College of Mathematics and Physics,Chongqing University,Chongqing 400044,China)

Abstract: Based on the Nevanlinna second fundamental theorem and the properties for entire functions of order, this paper discussed the unicity theorems for entire functions of finite order and obtained the two results concerning the multiplicity,which generalized and improved some results obtained by Lu Weiran and Lin Weichuan.

Key words: entire function; unicity; finite order

责任编辑: 李翠薇