第 28 卷第 1 期　　重庆工商大学学报(自然科学版)　　2011 年 2 月
Vol. 28 NO. 1　　J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed)　　Feb. 2011

文章编号:1672 - 058X(2011)01 - 0018 - 04

正规矩阵的范数和它的幂级数收敛性

郭 华

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:研究了正规矩阵的范数,给出了正规矩阵的几种常用范数的几个性质;利用范数和谱半径与矩阵幂级数的收敛性的关系,给出了关于正规矩阵的幂级数收敛性的一些新结论.

关键词:矩阵范数; 矩阵幂级数;谱半径;特征值;绝对收敛

中图分类号:O151　　**文献标志码**: A

1 预备知识

定义 1[1] 设 $A\in C^{n\times n}$,如 $AA^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}A$($A^{\mathrm{H}}$ 是 A 的共轭转置矩阵),则称 A 为复正规矩阵. 当 $A\in R^{n\times n}$时,且 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A$,则称 A 为实正规矩阵.

定义 2[1] 设 $A\in C^{m\times n}$,用 $\|A\|$ 表示按照某个法则确定的与 A 对应的实数,且满足:1) 非负性:当 $A\neq O$ 时,$\|A\|>0$;当且仅当 $A=O$ 时,$\|A\|=0$; 2) 齐次性:对任意复数 k,有 $\|kA\|=|k|\,\|A\|$; 3) 三角不等式:对任意两个同类型矩阵 A,B 都有 $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$; 4) 矩阵乘法相容性:若 A,B 可乘,有 $\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|$. 则称对应于 A 的这个实数 $\|A\|$ 为矩阵 A 的范数.

常用的几种矩阵范数为:

(1) Frobenius 范数: $\|A\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$; (2) 列和范数: $\|A\|_1=\max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}|,j=1,2,\cdots,n$; (3) 谱范数: $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{H}}A)}$,其中 $\lambda_{\max}(A^{\mathrm{H}}A)$ 是 $A^{\mathrm{H}}A$ 的最大特征值; (4) 行和范数: $\|A\|_\infty=\max\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|,i=1,2,\cdots,m$.

定义 3[1] 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的全部特征值,则 $\rho(A)=\max\limits_{i}\{|\lambda_i|\}$ 称为 A 的谱半径.

2 正规矩阵的范数的几个性质

引理 1[1] 设 $A\in C^{n\times n}$,而 $U\in C^{n\times n}$ 与 $V\in C^{n\times n}$ 都是酉矩阵,则 $\|UA\|_{\mathrm{F}}=\|AV\|_{\mathrm{F}}=\|A\|_{\mathrm{F}}$.

性质 1 设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵,它的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 $\|A\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2+\cdots+|\lambda_n|^2}$,如记 $\alpha=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}$,即是 $\|A\|_{\mathrm{F}}=\|\alpha\|_2$.

证明 因为 A 是正规矩阵,所以存在酉矩阵 U,使得 $U^{\mathrm{H}}AU=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,而 $\|A\|_{\mathrm{F}}=\|U^{\mathrm{H}}AU\|_{\mathrm{F}}=\|\Lambda\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2+\cdots+|\lambda_n|^2}$.

引理 2[1]**(特征值上界定理)** 对任意 $A\in C^{n\times n}$,总有 $\rho(A)\leqslant\|A\|$,这里 $\|\cdot\|$ 为 A 的任意一种范数.

性质 2 设 $A\in C^{n\times n}$为正规矩阵,则$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_{\mathrm{F}}\leqslant\rho(A)\leqslant\|A\|_{\mathrm{F}}$.

收稿日期:2010 - 04 - 19;**修回日期**:2010 - 05 - 20.

作者简介:郭华(1962 -),女,重庆人,副教授,从事矩阵理论研究.

证明　因为 $\|A\|_F=\sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2+\cdots+|\lambda_n|^2}\leqslant\sqrt{n|\lambda_{\max}|^2}=\sqrt{n}|\lambda_{\max}|$,这里 $|\lambda_{\max}|$ 表示 A 的特征值模的最大值,所以 $\rho(A)=|\lambda_{\max}|\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F$,再由引理 2 可知该性质成立.

引理 3[2]　设 $A\in C^{m\times n}$,而 $U\in C^{m\times m}$ 与 $V\in C^{n\times n}$ 都是酉矩阵,则 $\|A\|_2=\|UAV\|_2$.

性质 3　设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵,则 $\rho(A)=\|A\|_2$.

证明　因为 A 是正规矩阵,所以存在酉矩阵 U,使得 $U^{H}AU=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 所以 $\|A\|_2=\|U^{H}AU\|_2=\|\Lambda\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(\Lambda^{H}\Lambda)}$,又 $\Lambda^{H}\Lambda=\mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1\lambda_1,\bar{\lambda}_2\lambda_2,\cdots,\bar{\lambda}_n\lambda_n)$,$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(\Lambda^{H}\Lambda)}=\sqrt{\max\limits_i(\bar{\lambda}_i\lambda_i)}=\sqrt{\max\limits_i(|\lambda_i|^2)}=\max\limits_i|\lambda_i|=\rho(A)$.

性质 4　设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵,则 $\|A\|_2^2=\rho(A^{H}A)$,$\rho^2(A)=\rho(A^{H}A)$.

证明　因为 $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^{H}A)}=\sqrt{\rho(A^{H}A)}$,所以 $\|A\|_2^2=\rho(A^{H}A)$,由性质 3 知 $\rho^2(A)=\rho(A^{H}A)$.

性质 5　$A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵$\Leftrightarrow\forall x\in C^{n\times 1}$,有 $\|Ax\|_2=\|A^{H}x\|_2$(注:$\|x\|_2=\sqrt{x^{H}x}$).

证明　充分性:因为 A 是正规矩阵,有 $AA^{H}=A^{H}A$,$\|Ax\|_2=\sqrt{(Ax)^{H}(Ax)}=\sqrt{x^{H}A^{H}Ax}=\sqrt{x^{H}AA^{H}x}=\sqrt{(A^{H}x)^{H}(A^{H}x)}=\|A^{H}x\|_2$.

必要性:若 $\forall x\in C^{n\times 1}$,有 $\|Ax\|_2=\|A^{H}x\|_2$,即有 $\sqrt{(Ax)^{H}(Ax)}=\sqrt{(A^{H}x)^{H}(A^{H}x)}$,两端平方,$x^{H}A^{H}Ax=x^{H}AA^{H}x$,于是 $x^{H}(A^{H}A-AA^{H})x=0$,由 x 的任意性,必有 $A^{H}A-AA^{H}=0$,即 $AA^{H}=A^{H}A$,A 为正规矩阵.

3　正规矩阵的幂级数收敛性

定义 4[1]　设 $A_k=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,称形如 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k=a_0A^0+a_1A+\cdots+a_kA^k+\cdots$ 的矩阵级数为方阵 A 的幂级数;当 A 为正规矩阵时,该幂级数称为正规矩阵 A 的幂级数.

引理 4[1]　若方阵 A 的某一范数 $\|A\|$ 在数项幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 的收敛域内,则方阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 绝对收敛.

由性质 1 和引理 4 显然有下列结论:

定理 1　对正规矩阵 A 的幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$,若 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 的收敛半径为 R,A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则当 $\sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2+\cdots+|\lambda_n|^2}\leqslant R$ 时,$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 绝对收敛.

引理 5[1]　设数项幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 的收敛半径为 R,$A\in C^{n\times n}$,若 $\rho(A)<R$,则方阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 绝对收敛;若 $\rho(A)>R$,则方阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 发散. 由于 A 是正规矩阵时,有 $\rho(A)=\|A\|_2$,所以有下述结论:

定理 2　设数项幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 的收敛半径为 R,$A\in C^{n\times n}$,若 $\|A\|_2<R$,则方阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 绝对收敛;若 $\|A\|_2>R$,则方阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 发散.

将引理 5 应用到正规矩阵的幂级数上,可以得到一些更精确的判定定理.

定理 3　对正规矩阵 A 的幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$,设 $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\rho\neq 0$,$A$ 是酉阵(正交矩阵或为幂等矩阵,$A^2=A$),则当 $\rho<1$ 时,$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 绝对收敛,当 $\rho>1$ 时,$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 发散.

证明　因为酉矩阵和正交矩阵的任意特征值 λ 的模 $|\lambda|=1$,而幂等矩阵的特征值只能是 0 和 1,所以当 A 是这两类矩阵时,谱半径 $\rho(A)=1$.

当$\rho<1$时,数项幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$的收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}>1$,此时总有$\rho(A)=1<R$,所以$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$绝对收敛;当$\rho>1$时,数项幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$的收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}<1$,此时总有$\rho(A)=1>R$,所以$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$发散.

定理4 设$A\in C^{n\times n}$,对方阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$,如$\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\rho=+\infty$,则当$A$存在非零特征值时,方阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$发散;当$A$只有零特征值时,方阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$绝对收敛.

证明 当A存在非零特征值时,设A的全部特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$,其中$\lambda_i$是$A$的$n_i$重特征值,$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$. 不妨设$\lambda_i\neq0,1\leqslant i\leqslant r$,设$J$是$A$的Jordan标准型,则存在可逆阵$P\in C^{n\times n}$,使得$A=PJP^{-1}=P\mathrm{diag}(J_1(\lambda_1),J_2(\lambda_2),\cdots,J_r(\lambda_r))P^{-1}$,其中$\lambda_i$是$A$的$n_i$重特征值,$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$,

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{pmatrix}$$

于是$A^k=(PJP^{-1})^k=PJ^kP^{-1}=P\mathrm{diag}(J_1^k(\lambda_1),J_2^k(\lambda_2),\cdots,J_r^k(\lambda_r))P^{-1}$,

$$J_i^k(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{n_i-1}\lambda_i^{k-n_i+1} \\ & \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$$

故$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(PJ^kP^{-1})=P(\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kJ^k)P^{-1}=P\mathrm{diag}(\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kJ_1^k(\lambda_1),\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kJ_2^k(\lambda_2),\cdots,\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kJ_r^k(\lambda_r))P^{-1}$,其中:

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kJ_i^k(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_i^k & \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kC_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kC_k^{n_i-1}\lambda_i^{k-n_i+1} \\ & \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_i^k & \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kC_k^1\lambda_i^{k-1} & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_i^k & \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kC_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_i^k\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$$

当$k<l$时,$C_k^l=0$.

由题设可知数项幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$的收敛半径$R=0$,即$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$只在$x=0$点收敛. 所以幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_i^k$发散,从而可知$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kJ_i^k(\lambda_i)$发散,即知$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$发散.

当A只有零特征值时,即是$\lambda=0$是A的n重特征值,因为任意一个n阶复矩阵都酉相似于一个上三角

阵,且对角线上的元素就是 A 的 n 个特征值. 即存在酉阵 $U(U^{H}=U^{-1})$,使得 $U^{H}AU=U^{-1}AU=B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$,所以 $A^{k}=UB^{k}U^{-1}$,容易知道 $B^{n}=O$,于是 $\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k=U(\sum_{k=0}^{n-1}a_kB^{n-1})U^{-1}$,所以 $\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 绝对收敛.

推论 1　设 A 为非零正规矩阵时,当 $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\rho=+\infty$ 时,$\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 一定发散.

证明　只需证明 A 的特征值不可能全为零. 假如 A 的特征值全为零,则因为存在酉矩阵 U 使得 $U^{H}AU=\mathrm{diag}(0,0,\cdots,0)$,得到 $A=U\mathrm{diag}(0,0,\cdots,0)U^{H}=O$,与 A 非零矛盾.

注意到 A 为正规矩阵,且 $A\neq x_0E$ 时,有 $A-x_0E$ 也为非零正规矩阵,所以得下列结论:

推论 2　设 A 为正规矩阵,且 $A\neq x_0E$,对矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(A-x_0E)^k$,当 $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\rho=+\infty$ 时,矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(A-x_0E)^k$ 一定发散.

参考文献:

[1] 史荣昌. 矩阵分析[M]. 北京:北京理工大学出版社,1996

[2] 罗家洪,周继东,李医民. 矩阵论[M]. 北京:清华大学出版社,2005

[3] 罗家洪. 矩阵分析引论[M]. 广州:华南理工大学出版社,1998

[4] 超玉平. 矩阵幂级数绝对收敛的判定[J]. 甘肃联合大学学报:自然科学版,2007(5):12-14

[5] 张总诚. 幂级数的推广[J]. 长春师范学院学报:自然科学版,2005(2):12-14

[6] 沈浮,王俊. 正项矩阵级数的敛散性研究[J]. 工科数学,2000(3):114 -116

[7] 方洋旺. 关于函数幂级数的几个性质[J]. 青海师范大学:自然科学版,1993(3):5-7

The Norm of Normal Matrix and the Convergence of Its Power Series

GUO Hua

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: This article has studied the norm of normal matrix and has given some properties of several kinds of commonly used norm of normal matrix; by using the relation between the norm, the spectral radius and the convergence of matrix power series, the article also gives some new conclusions about the convergence of normal matrix power series.

Key words: matrix norm; matrix power series; spectral radius; characteristic value; absolute convergence

责任编辑:李翠薇