文章编号:1672 - 058X(2011)01 - 0014 - 04

二阶变系数齐线性常微分方程的求解*

方辉平, 叶 鸣
(黄山学院 数学系,安徽 黄山 245041)

摘 要:给出了二阶变系数齐线性常微分方程一种新的求解方法. 将二阶变系数齐线性常微分方程问题转化为 Riccati 方程来求解,讨论了二阶变系数齐线性常微分方程的通解和初值问题,得到初值问题近似解的理论基础、计算方法和误差估计.

关键词:二阶变系数齐线性常微分方程;Riccati 方程;误差估计
中图分类号:O175.1 **文献标志码**: A

微分方程来源于生产实际,研究微分方程的目的就在于掌握它所反映的客观规律,能动地解释所出现的各种现象并预测未来可能的情况. 然而能用初等解法的微分方程是很有限的,特别是对于高阶微分方程. 对于二阶常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q(t)x=f(t)$$

其中 $p(t)$ 和 $q(t)$ 为 t 的在区间上的连续函数,文献[1,2]比较详细地介绍了常系数齐线性微分方程的特征根法和 Euler 待定指数函数法、常系数非齐线性微分方程特解的待定系数法和 Laplace 变换法以及非齐线性微分方程特解的常数变易法. 文献[3-5]研究了一些比较特殊的方程的解法,但都没有给出一般的解法.

对于一般的二阶变系数齐线性常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q(t)x=0 \tag{1}$$

如果知道它的一个特解 x_1,就可以求出它的通解 $x=x_1(c_1+c\int\frac{1}{x_1^{\,2}}\mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t)$. 但二阶齐次变系数常微分方程的一个特解是很难准确地求出来的,下面通过化为 Riccati 方程来寻求其解.

1 二阶变系数齐线性常微分方程的通解

引理 1 设 u_1 是 Riccati 方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-u^2-p(t)u-q(t) \tag{2}$$

的一个特解,则其通解为 $u=u_1+\frac{1}{w}$,其中 $w=\mathrm{e}^{\int[2u_1+p(t)]\mathrm{d}t}(c_1+\int\mathrm{e}^{-\int[2u_1+p(t)]\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t)$.

引理 2 二阶变系数齐线性常微分方程(1)有形如 e^z 的解.

证明 令 $x=\mathrm{e}^z$,有:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\mathrm{e}^z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^z\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

收稿日期:2010 - 08 - 17;**修回日期**:2010 - 09 - 25.
* **基金项目**:安徽省高校省级自然科学基金(KJ2009B276Z);黄山学院教研重点项目(2008hsujyz007).

作者简介:方辉平(1976 -),男,安徽歙县人,副教授,硕士,从事常微分方程及其应用研究.

代人方程(1)可以得到：

$$\frac{d^2z}{dt^2}+(\frac{dz}{dt})^2+p(t)\frac{dz}{dt}+q(t)=0 \tag{3}$$

令 $u=\frac{dz}{dt}$，则方程(3)就化为了 Riccati 方程(2)，$\frac{du}{dt}+u^2+p(t)u+q(t)=0$. 如果知道它的一个特解 u_1，则 $z=\int u_1dt$.

由引理 1 和引理 2，就可以得到下列结论.

定理 1　设 u_1 是 Riccati 方程(2)的一个特解，则二阶变系数齐线性常微分方程(1)的通解可以表示为：

$$x=e^{\int u(t)dt}=e^{\int(u_1+\frac{1}{w})dt}\text{，其中 } w=e^{\int[2u_1+p(t)]dt}(c_1+\int e^{-\int[2u_1+p(t)]dt}dt) \tag{4}$$

2　二阶变系数齐线性微分方程的初值问题

2.1　Riccati 方程的解与近似解

令 $f(t,u)=-u^2-p(t)u-q(t)$，则 Riccati 方程(2)化为：

$$\frac{du}{dt}=f(t,u) \tag{5}$$

设 $f(t,u)$ 是矩形域 $R:|t-t_0|\leqslant a,|u-u_0|\leqslant b$ 上的连续函数，且关于 u 满足利普希茨(lipshitz)条件，则方程(5)存在唯一的解 $u=u(t)$，定义于区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 上，连续且满足初始条件 $u(t_0)=u_0$. 这里 $h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$，$M=\max|f(t,u)|$[1].

可以构造 Picard 逐步逼近函数列：

$$u_0(t)=u_0$$

$$u_n(t)=u_0+\int_{t_0}^{t}f(v,u_{n-1}(v))dv,t_0\leqslant t\leqslant t_0+h,n=1,2,3,\cdots$$

求出的近似解 $u_n(t)$ 与真正的解 $u(t)$ 在区间 $|t-t_0|\leqslant h$ 内的误差估计式：

$$|u_n(t)-u(t)|\leqslant\frac{ML^nh^{n+1}}{(n+1)!} \tag{6}$$

2.2　二阶变系数齐线性常微分方程的解

定理 2　对于初值问题：

$$\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0\\ x(t_0)=x_0\neq 0,x'(t_0)=x_1\end{cases} \tag{7}$$

有 $x_n(t)=x_0e^{\int_{t_0}^{t}u_n(t)dt}$ 形式的近似解，其中 $u_n(t)$ 是方程 $\frac{du}{dt}=f(t,u)$ 满足初始条件 $u(t_0)=\frac{x_1}{x_0}$ 的近似解，其误差估计式为：

$$|x_n(t)-x(t)|\leqslant x_0\frac{ML^nh^{n+1}}{(n+1)!}e^{\frac{ML^nh^{n+1}}{(n+1)!}} \tag{8}$$

证明　由定理 1 得 $\int u(t)dt=\ln x$，即 $u(t)=\frac{x'(t)}{x(t)}$，所以易将初值问题(7)转化为 Riccati 方程的初值问题：

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}=-u^2-up(t)-q(t)\\ u(t_0)=\frac{x_1}{x_0}\end{cases}$$

通过构造皮卡逐步逼近序列可以求得其近似解 $u_n(t)$.

记 $x_n(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} u_n(t)dt}$，则：

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} x_0 e^{\int_{t_0}^{t} u_n(t)dt} = x_0 e^{\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} u_n(t)dt} = x_0 e^{\int_{t_0}^{t}(\lim_{n\to\infty} u_n(t))dt} = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} u(t)dt} = x(t)$$

即 $x_n(t)$ 收敛于 $x(t)$，所以 $x_n(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} u_n(t)dt}$ 为初值问题(7)的近似解.

由于 $u_n(t)$ 与真正的解 $u(t)$ 在区间 $|t-t_0| \leqslant h$ 内的误差估计式为 $|u_n(t) - u(t)| \leqslant \frac{ML^n h^{n+1}}{(n+1)!}$. 由中值定理得：

$$|x_n(t) - x(t)| = \left|x_0 e^{\int_{t_0}^{t} u_n(t)dt} - x_0 e^{\int_{t_0}^{t} u(t)dt}\right| = x_0 e^{\xi(t)} \left|\int_{t_0}^{t} u_n(t)dt - \int_{t_0}^{t} u(t)dt\right|$$

$\xi(t)$ 介于 $\int_{t_0}^{t} u_n(t)dt$ 和 $\int_{t_0}^{t} u(t)dt$ 之间，因此：

$$|\xi(t)| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} u_n(t)dt\right| + \max\left|\int_{t_0}^{t} u_n(t)dt - \int_{t_0}^{t} u(t)dt\right| = \left|\int_{t_0}^{t} u_n(t)dt\right| + \max\left|\int_{t_0}^{t}(u_n(t) - u(t))dt\right| \leqslant Hh + \frac{ML^n h^{n+1}}{(n+1)^n} \cdot h = Hh + \frac{ML^n h^{n+2}}{(n+1)^n}$$

由于 $u_n(t)$ 在 $[t_0, t]$ 连续，故有界. 可以取 $H = \max_{[t_0,t]} |u_n(t)|$，所以 $|x_n(t) - x(t)| \leqslant x_0 \frac{ML^n h^{n+1}}{(n+1)!} e^{Hh + \frac{ML^n h^{n+2}}{(n+1)^n}}$.

2.3 Lipshitz 常数的确定

1) 如果在 R 上 $\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}$ 存在且连续，则 $\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}$ 在 R 上有界，可取 $L = \max_R \left|\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}\right|$.

2) 也可取 $L = \max_R\{|p(t)| + 2|u|\}$. 事实上，$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| = |-u_1^2 - p(t)u_1 + u_2^2 + p(t)u_2| \leqslant |(u_1 - u_2)| \cdot \max\{|p(t)| + |u_1| + |u_2|\} \leqslant L|u_1 - u_2|$.

3 理论应用

例 1 求二阶变系数方程 $\frac{dx^2}{dt^2} + 2t\frac{dx}{dt} + 3t^2 x = 0$ 满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 1$ 在区间 $-1 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 2$ 的近似解，使其误差不超过 0.01.

解 将二阶变系数方程 $\frac{dx^2}{dt^2} + 2t\frac{dx}{dt} + 3t^2 x = 0$ 满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 1$ 的问题转化为 Riccati 方程 $\frac{du}{dt} = -u^2 - 2tu - 3t^2$ 满足初始条件 $u(0) = 1$ 的问题.

先考虑方程 $\frac{du}{dt} = -u^2 - 2tu - 3t^2$ 过点 $(0,1)$ 且在区间 $-1 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant u \leqslant 2$ 上的解. 取 $L = \max\{|-2t| + |2u|\} = 6$, $M = \max|-u^2 - 2tu - 3t^2| = \max|(t+u)^2 + 2t^2| = 11$，则求得 $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \frac{1}{11}$.

记 $\delta = \frac{ML^n h^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\left(\frac{6}{11}\right)^n}{(n+1)!}$，由定理 2 知道，要使得误差 $|x_n(t) - x(t)| \leqslant x_0 \frac{ML^n h^{n+1}}{(n+1)!} e^{Hh + \frac{ML^n h^{n+2}}{(n+1)^n}} = \delta e^{\frac{2+\delta}{11}} \leqslant 0.01$，只需要 $\delta \leqslant 0.005$，所以取 $n > 2$，就有 $|u_n(t) - u(t)| \leqslant \frac{ML^n h^{n+1}}{(n+1)!} = 11 \cdot \frac{6^n}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^{n+1} = \left(\frac{6}{11}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)!} \leqslant 0.002 < 0.005$.

可以取 $n = 3$，由 Picard 逐步逼近函数列，得 $u_0(t) = u_0 = 1$，则：

$$u_1(t) = 1 + \int_0^t (-1 - 2t - 3t^2)du = 1 - t - t^2 - t^3$$

$$u_2(t) = 1 + \int_0^t (-u_1^{\ 2} - 2tu_1 - 3t^2)\,\mathrm{d}t = 1 - t + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^6 - \frac{1}{7}t^7$$

$$u_3(t) = \int_0^t (-u_2^{\ 2} - 2tu_2 - 3t^2)\,\mathrm{d}t =$$

$$1 + \int_0^t \left[-(1 - t + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^6 - \frac{1}{7}t^7)^2 - 2t(1 - t + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^6 - \frac{1}{7}t^7) - 3t^2\right]\mathrm{d}t =$$

$$-\frac{t^{15}}{735} - \frac{t^{14}}{147} - \frac{53t^{13}}{4\,095} + \frac{t^{12}}{1\,260} + \frac{2t^{11}}{75} + \frac{t^{10}}{50} - \frac{23t^9}{252} - \frac{11t^8}{84} - \frac{2t^7}{105} + \frac{2t^6}{5} - \frac{t^5}{5} + 2t^2 - t + 1$$

此时可以求出方程$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2} + 2t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3t^2x = 0$ 在区间 $-1 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 2$ 的近似解为：

$$x_3(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t u_3(t)\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\frac{t^{16}}{11\,760} - \frac{t^{15}}{2\,205} - \frac{53t^{14}}{57\,330} + \frac{t^{13}}{16\,380} + \frac{t^{12}}{450} + \frac{t^{11}}{550} - \frac{23t^{10}}{2\,520} - \frac{11t^9}{756} - \frac{t^8}{420} + \frac{2t^7}{35} - \frac{t^6}{30} + \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^2}{2} + t}$$

并且与真正解误差不超过 0.01.

参考文献：

[1] 王高雄. 常微分方程[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，1983

[2] GEAR C W. 常微分方程初值问题的数值解法[M]. 费景高，译. 北京：科学出版社，1978

[3] 胡劲松，郑克龙. 一类二阶变系数线性微分方程的求解[J]. 重庆工商大学学报：自然科学版，2004，21(5)：429-430

[4] 余生寅，苏连生. 二阶齐次变系数常微分方程的通解形式[J]. 青海大学学报，2003，10(9)：38-45

[5] 张永明，张二艳，王丹. 关于二阶常系数线性齐次常微分方程的通解的一个注记[J]. 大学数学，2006，22(2)：142-143

Solution to Second-order Homogeneous-linear Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients

FANG Hui-ping, YE Ming

(Department of Mathematics, Huangshan University, Anhui Huangshan 245041, China)

Abstract: This paper presents a new method of solution to the second order homogeneous linear ordinary differential equation with variable coefficients. The second-order homogeneous linear ordinary differential equation with variable coefficients can be translated to Riccati equation and its general solution and initial value problem were discussed. The basic principle, calculating method and error estimation were obtained about approximate solution of initial value problem.

Key words: second-order homogeneous linear ODE with variable coefficients; Riccati Equation; error estimate

责任编辑：李翠薇