

文章编号:1672-058X(2011)01-0001-07

一个新超混沌系统的控制与自适应同步*

赵国辉, 舒永录**

(重庆大学 数理学院, 重庆 400044)

摘要:讨论了一个新超混沌系统的控制及同步问题,在参数已知时,设计了一个线性控制器和一个速度反馈控制器,得到将系统控制到不稳定平衡点的充分条件;并且对控制前后的情况用图像作了比较,比较形象地说明了控制的有效性和科学性;在参数未知的时候,科学地设计了 4 个非线性控制器和参数估计的自适应律,得到了实现全局完全同步的充分条件;理论与仿真结果都验证了结论的有效性和科学性。

关键词:超混沌控制;超混沌同步;线性反馈;速度反馈;自适应同步

中图分类号:059

文献标志码:A

混沌是在确定系统中产生的不规则运动,是非线性动力学系统所特有的一种运动形式,其基本特征是对初始条件的敏感性。混沌理论的研究热潮则是由美国气象学家 Lorenz 的发现所引发的^[1]。随着对混沌的深入研究和实际工程需要,各种非线性混沌系统也被相继提出,并得到了广泛的研究。比如著名的 Lorenz 系统^[1]、Rossler 系统^[2]、Chua 系统^[3]、以及在 Lorenz 混沌系统反控制中被发现的 Chen 系统^[4]、Lu 系统^[5]、统一混沌系^[6]统等。最近 Chen 等^[7]通过数值计算发现了一个新的混沌系统,并对其基本动力学特性作了初步分析。

1990 年,美国马里兰大学的物理学家 E. Ott, C. Grebogi 和 J. A. Yorke 基于参数扰动,首先提出混沌系统控制的 OGY 方法^[8]。同年, L. M. Pecora, T. L. Carroll^[9]提出了混沌同步的驱动响应法,并用实验演示了混沌同步在保密通信中的应用。这些工作引发了后来混沌应用的研究热潮,目前已经有多种方法,如:线性与非线性反馈控制^[10],延迟反馈控制^[11],脉冲同步^[12],滑模控制^[13],自适应同步方法^[14]等。针对 Chen 等^[7]提出的新的混沌系统,研究其控制与同步问题。在参数已知识,设计了两个线性控制器,得到将系统控制到任意不稳定平衡点的充分条件。在参数已知的时候,设计了两个非线性控制器,得到了实现全局完全同步的充分条件。在参数未知的时候,设计了 3 个非线性控制器和参数估计的自适应律,得到了实现全局完全同步的充分条件。用 Lyapunov 函数法从理论上证明了结论正确,还用 Matlab 作了数值模拟,模拟表明设计是可行的。

1 新超混沌系统及其平衡点稳定性的分析

最近,Chen 等人^[7]获得了一个新的超混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + eyz \\ \dot{y} = cx - dxz + y + w \\ \dot{z} = xy - bz \\ \dot{w} = -ky \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期:2010-04-28;修回日期:2010-05-27.

* 基金项目:重庆市自然科学基金项目(2009BB3185).

作者简介:赵国辉(1982-),硕士研究生,从事动力系统的研究.

** 通讯作者:舒永录(1963-),男,四川武胜人,博士,副教授,从事非线性分析和动力系统的研究. E-mail: shuyonglu@163.com.

这里 $(a, b, c, d, e, k) \in \mathbf{R}^6$ 。当 $a=35, b=4.9, c=25, d=5, e=35, k \in (171, 241), (297, 331), (536.5, 556)$ 时, 系统(1)是混沌的; 当 $a=35, b=4.9, c=25, d=5, e=35$ 和 $k \in (0, 171), (241, 297)$ 时, 系统(1)是超混沌的; 当 $a=35, b=4.9, c=25, d=5, e=35, k \in (331, 340), (386, 536.5), (556, 570), (577, 583)$ 时, 系统(1)是周期的; 当 $a=35, b=4.9, c=25, d=5, e=35, k=22k \in (570, 577), (583, 843)$ 时, 系统(1)是拟周期的。下面考虑超混沌的情况。当 $a=35, b=4.9, c=25, d=5, e=35, k \in (0, 171), (241, 297)$ 时, 可知超混沌系统(1)仅仅拥有一个平衡点 $O(0, 0, 0, 0)$ 。与超混沌系统(1)有关的相空间中的体积 $X(t)$ 的元素 $\delta X(t) = \delta x \delta y \delta z \delta w$ 的变化由如下的轨道流确定

$$\nabla \cdot X = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial w} = -(a+b-1) \quad (2)$$

其中 $X = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{w}) = [a(y-x) + eyz, cx - dxz + y + w, xy - bz, -ky]$, 若 $(a+b-1) > 0$, 超混沌系统(1)就是一个耗散系统。显然, 当参数 $a=35, b=4.9, c=25, d=5, e=35, k \in (0, 171), (241, 297)$ 时, 超混沌系统(1)的平衡点 $O(0, 0, 0, 0)$ 是不稳定的。可见系统(1)与 Lorenz 族系统不是拓扑等价的, 从而(1)是新的系统。Chen 等人在文献[7]中通过数值计算发现: 是鞍点。特别地, 对于第二种当 $a=35, b=4.9, c=25, d=5, e=35, k=22$ 时, 图1为超混沌系统(1)的吸引子。

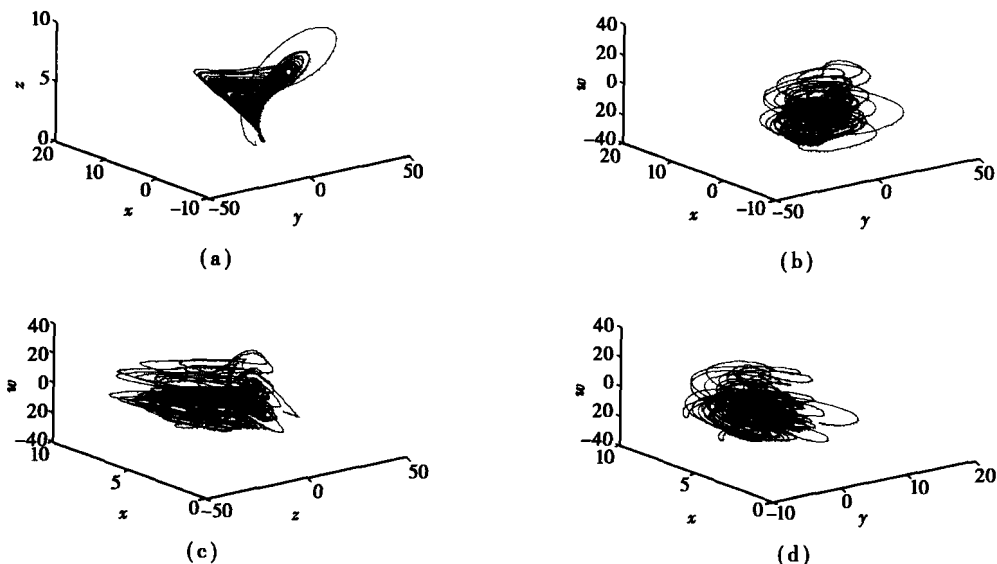


图1 系统(1)的超混沌吸引子

2 超混沌系统的控制与同步

2.1 直接线性反馈控制

用直接线性反馈的方法来实现在不稳定平衡点 $O(0, 0, 0, 0)$ 的控制。

2.1.1 控制器的设计

为了控制超混沌系统(1)的不稳定平衡点 $O(0, 0, 0, 0)$, 令 u_1, u_2, u_3 和 u_4 为控制器。考虑被控的超混沌系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) + eyz + u_1 \\ \dot{y} = cx - dxz + y + w + u_2 \\ \dot{z} = xy - bz + u_3 \\ \dot{w} = -ky + u_4 \end{cases} \quad (3)$$

定理1 对于系统(3), 当控制器 $u_1 = -k_1x, u_2 = -k_2y, u_3 = -k_3z, u_4 = -k_4w$, 时(其中 $k_4 = a + k_1$,

$k_i (i=1,2,3,4)$ 为反馈增益, $k_4 > 0, k_3 > -b, k_1 > -a, k_1 + k_2 > 1 - a, (k_1 + a)(k_2 - 1) - ac + k > 0$, 系统(3)在平衡点 $O(0,0,0,0)$ 是稳定的。

证明 将上述控制器代入(3)得:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + eyz - k_1x, \\ \dot{y} = cx - dxz + y + w - k_2y, \\ \dot{z} = xy - bz - k_3z, \\ \dot{w} = -ky - k_4w. \end{cases} \quad (4)$$

则(4)的 Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} -a - k_1 & a & 0 & 0 \\ c & 1 - k_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b - k_3 & 0 \\ 0 & -k & 0 & -k_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

它的特征多项式为:

$$(\lambda + a + k_1)(\lambda + b + k_3)[\lambda^2 + (a + k_1 + k_2 - 1)\lambda + (a + k_1)(k_2 - 1) - ac + k] = 0 \quad (6)$$

特征值为 $\lambda_1 = -a - k_1, \lambda_2 = -b - k_3, \lambda_3 = \frac{1}{2}(-A + \sqrt{\Delta}), \lambda_4 = \frac{1}{2}(-A - \sqrt{\Delta})$, (其中 $A = k_1 + k_2 + a - 1, \Delta = (k_1 + k_2 + a - 1)^2 - 4[(k_1 + a)(k_2 - 1) - ac + k]$), 由定理条件 $k_4 > 0, k_3 > -b, k_1 > -a, k_1 + k_2 > 1 - a, (k_1 + a)(k_2 - 1) - ac + k > 0$, 得到 J 的特征值全部都是负实根。故系统(3)在平衡点 $O(0,0,0,0)$ 稳定的。所以当 u_1, u_2, u_3, u_4, k_2 和 k_4 满足定理 1 所述条件时, 系统被很好的控制到平衡点。

2.1.2 数值仿真与图像分析

利用数值仿真来验证所得的控制器有效性。取系统的参数为 $a = 35, b = 4.9, c = 25, d = 5, e = 35, k = 22$, 初值为 $(1, 3, -0.5, -1)$ 。当 $k_1 = 0, k_2 = 40, k_3 = 0, k_4 = 35$ 时, 在线性反馈控制器作用下, 图 2 为被控系统的状态 (x, y, z, w) 的渐近稳定行为。

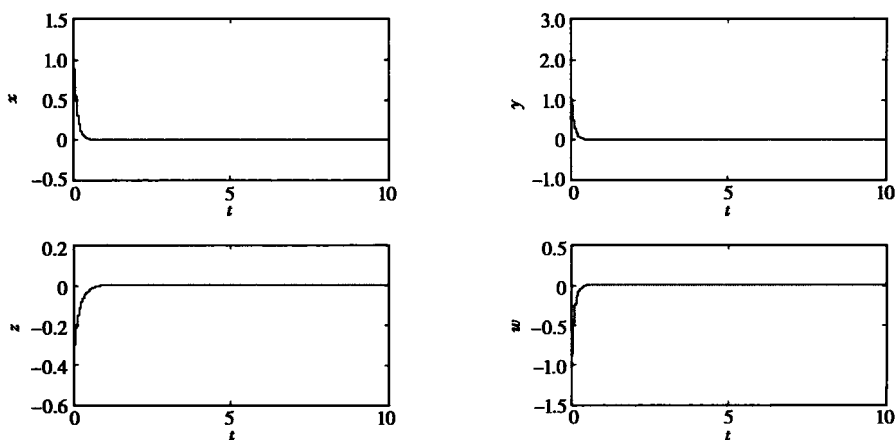


图 2 系统(4)的状态曲线

2.2 速度反馈控制

用非线性反馈的方法来实现在不稳定平衡点 $O(0,0,0,0)$ 的速度反馈控制。

2.2.1 控制器的设计

为了控制超混沌系统(1)的不稳定平衡点 $O(0,0,0,0)$, 令 u_1, u_2, u_3 和 u_4 为控制器。考虑被控的超混沌系统(图 2)。

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) + eyz + u_1 \\ \dot{y} = cx - dxz + y + w + u_2 \\ \dot{z} = xy - bz + u_3 \\ \dot{w} = -ky + u_4 \end{cases} \quad (7)$$

定理 2 对于系统(9),当控制器 $u_1=0, u_2=0, u_3=0, u_4 = -k_0 \dot{y}$ 时(其中 k_0 为速度反馈系数,且 $k_0 > \frac{-k-380 + \sqrt{k^2 + 900k + 4\,476\,000}}{70}$),系统(7)在平衡点 $O(0,0,0,0)$ 是稳定的。

证明 将上述控制器带入式(7)得:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) + eyz, \\ \dot{y} = cx - dxz + y + w, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{w} = -ky - k_0(cx - dxz + y + w). \end{cases} \quad (8)$$

则,在原点 $O(0,0,0,0)$ 的 Jacobi 矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ -ck_0 & -k - k_0 & 0 & -k_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

它的特征多项式为:

$$(\lambda + b)(\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3) = 0 \quad (\text{其中 } c_1 = k_0 + a - 1, c_2 = ak_0 + k - a - ac, c_3 = ak) \quad (10)$$

当 $a = 35, b = 4.5, c = 25, d = 5, e = 35, k \in (0, 171), (241, 297)$, 显然有 $c_3 = 35k > 0$, 因为 $k_0 > \frac{-k-380 + \sqrt{k^2 + 900k + 4\,476\,000}}{70}$, 所以 $c_1c_2 - c_3 > 0, c_1 > 0$, 即稳定的。所以当 u_1, u_2, u_3, u_4, k_0 满足定理 2

所述条件时,系统被很好的控制到平衡点 $35k_0^2 + (k + 380)k_0 - k - 309\,40 > 0, k_0 + a - 1 > 0$, 根据 Routh-Hurwitz 定理得, (10) 有 4 个负实部的特征根, 故系统(7)在平衡点 $O(0,0,0,0)$ 。

2.2.2 数值仿真与图像分析

利用数值仿真来验证所得的控制器有效性。取系统的参数为 $a = 35, b = 4.9, c = 25, d = 5, e = 35, k = 22$ 及相关反馈系数 $k_0 = 40$, 初值为: $x(0) = 2, y(0) = 5, z(0) = -3, w(0) = 2$ 。在反馈控制器作用下, 图 3 为被控系统的状态 (x, y, z, w) 渐进稳定行为。

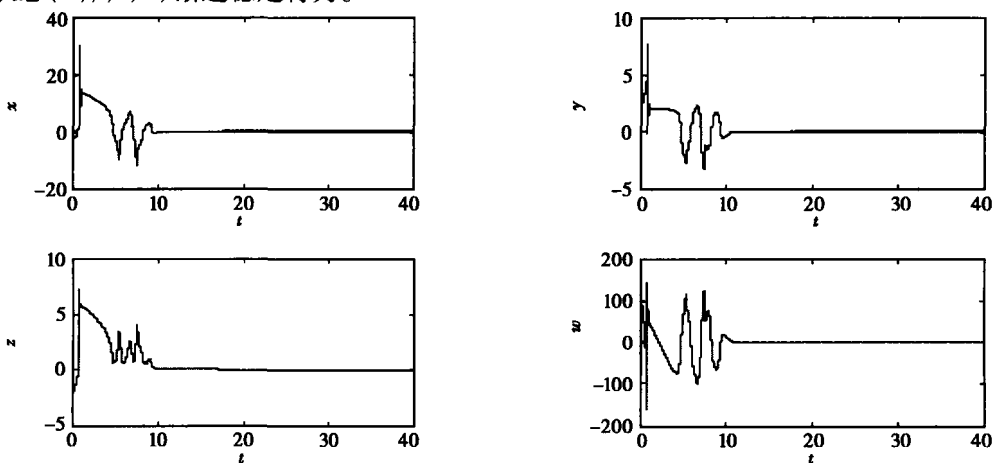


图 3 系统(7)的状态曲线图

2.3 系统控制前的状况

为了与控制后的图 2 和图 3 作比较,作出了未加控制时系统的演化波形图图 4。

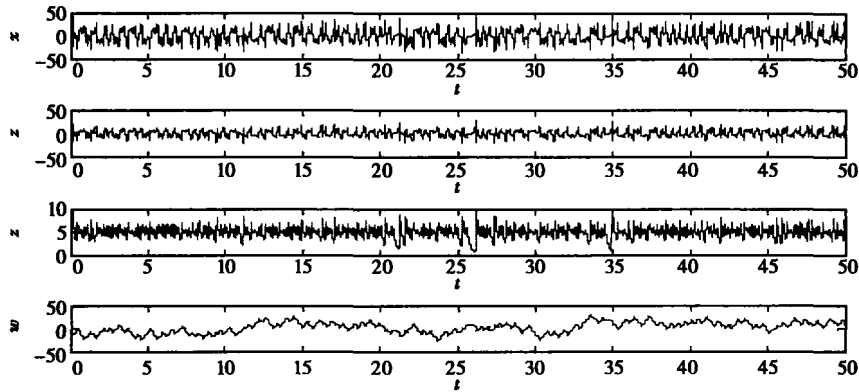


图 4 系统(1)未加控制时的状态变量的波形图

3 系统的自适应同步

定义 1 两个 n 维非线性动力系统:

$$\dot{x} = F(t, X) \tag{11}$$

$$\dot{y} = F(t, Y) + u(X, Y) \tag{12}$$

其中: $X, Y \in \mathbf{R}^n$, F 为 n 维非线性函数; u 为 n 维输入控制函数; (11) 系统为驱动系统; (12) 系统为响应系统。若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0$, 则称(11)系统与(12)系统是同步的。

3.1 自适应同步的设计

为了让系统(1)自身达到同步的行为,令(1)为驱动系统;响应系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) + ey_1z_1 + n_1 \\ \dot{y}_1 = cx_1 - dx_1z_1 + y_1 + w_1 + n_2 \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - bz_1 + n_3 \\ \dot{w}_1 = -ky_1 + n_4 \end{cases} \quad (N = [n_1, n_2, n_3, n_4]^T \text{ 是耦合控制信号}) \tag{13}$$

设系统的参数 a 未知,下面设计自适应控制函数使得该系统在参数未知的情况下达到自身的同步。

系统(1)减去系统(13)得到误差系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + e(e_2e_3 + z_1e_2 + y_1e_3) - n_1 \\ \dot{e}_2 = ce_1 - d(e_1e_3 + x_1e_3 + z_1e_1) + e_2 + e_4 - n_2 \\ \dot{e}_3 = e_1e_2 + x_1e_2 + y_1e_1 - be_3 - n_3 \\ \dot{e}_4 = -ke_2 - n_4 \end{cases} \tag{14}$$

通过反复尝试,取控制器和参数估计的自适应律如下:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = a_1e_2 + (1 + e)y_1e_3 \\ \dot{n}_2 = (ez_1 - dz_1 + c)e_1 + 2e_2 \\ \dot{n}_3 = (e - d + 1)e_1e_2 + (1 - d)x_1e_2 \\ \dot{n}_4 = (1 - k)e_2 + e_4 \end{cases} \tag{15}$$

$$\dot{\tilde{a}}_1 = e_1 e_2 + \tilde{a} \quad (16)$$

其中 $e_1 = x - x_1, e_2 = y - y_1, e_3 = z - z_1, e_4 = w - w_1, \tilde{a} = a - a_1$, 其中 a_1 为参数 a 的估计值, b, c, d, e, k 为已知。控制的目的是找到有效的控制器 $N = [n_1, n_2, n_3, n_4]^T$ 和参数估计法值使得驱动系统(1)和响应系统(13)达到全局渐近同步。即是 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 其中 $e(t) = [e_1, e_2, e_3, e_4]^T$ 。

下面的定理给出了在下列条件下, 系统(1)和(13)达到有效的同步。

定理 3 对于产生超混沌的任何参数 a, b, c, d, e, k 在控制器(15)和自适应律(16)作用下, 驱动系统(1)和响应系统(13)达到全局渐近同步。

证明 根据稳定理论, 构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \tilde{a}^2) \quad (17)$$

对沿系统(15)的轨道求导得:

$$\dot{V} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 + \tilde{a} \dot{\tilde{a}} \quad (18)$$

把式(14), 式(15)及式(16)代入式(18)得:

$$\dot{V} = -ae_1^2 - e_2^2 - be_3^2 - e_4^2 - \tilde{a}^2 \quad (19)$$

因此, 在系统(14)的一个零解邻域内, V 是正定的, 而 \dot{V} 是负定的, 根据 Lyapunov 稳定性理论知, 驱动系统(1)与响应系统(13)是全局渐近稳定的。

3.2 数值仿真与图像分析

参数未知时, 用 MATLAB 对误差系统(14)进行数值仿真, 驱动系统(1)的初始值为(1, 1, 1, 1), 响应系统(13)的初始值为(2, 2, 2, 0), 误差系统(14)的初值为(-1, -1, -1, 1)。取系统参考参数值 $a = 35, a_1$ 的初值 $a_{10} = 36$ 。当 $a = 35, b = 4.9, c = 25, d = 5, e = 35, k = 22$ 时, 在自适应控制器作用下, 图 5 展示误差变量 e_1, e_2, e_3, e_4 的时间序列以及参数估计 a_1 的波形图。

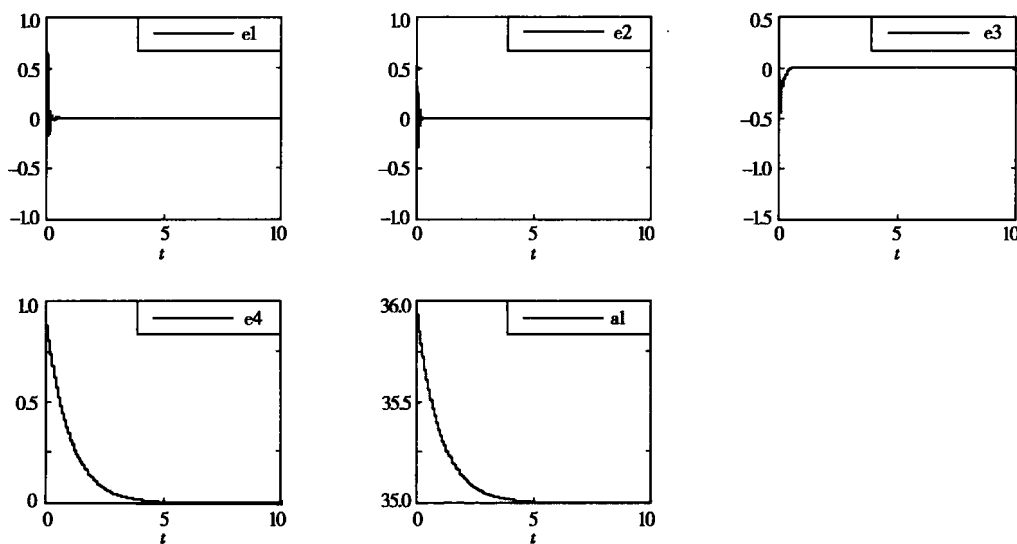


图 5 系统参数未知时全局完全同步的误差波形图和未知参数估计波形图

4 结 论

讨论了最近 Chen 等在[7]提出的混沌系统控制及同步问题, 在参数已知时, 设计了一个线性控制器和一个速度反馈控制器, 得到将系统控制到不稳定平衡点的充分条件。在参数未知的时候, 设计了 4 个非线性控制器和参数估计的自适应律, 得到了实现全局完全同步的充分条件。通过数值模拟对控制参数达到控制和同步的时间做了初步分析。

参考文献:

- [1] LORENZ E. Deterministic Nonperiodic Flow[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1963, 20: 130-141
- [2] ROSSLER O E. EQUATION FOR CONTINUOUS CHAOS[J]. Physics Letters, 1976, 57: 397-398
- [3] MATSUMOTO T. A chaotic attractor from Chua's circuit[J]. Circuits and Systems, IEEE Transactions, 1984, 31: 1055-1058
- [4] CHEN G, UETA T. Yet Another Chaotic Attractor[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1999, 9: 1465-1466
- [5] LU J, CHEN G. A new chaotic attractor coined[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 2002, 12: 659-661
- [6] LU J. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system[J]. Int J Bifurcat Chaos, 2002, 12: 2917-2926
- [7] CHEN Z Q, YANG Y, QI G Y, et al. A novel hyperchaos system only with one equilibrium[J]. Physics Letters A, 2007, 360 (6): 696-701
- [8] OTT E, GREBOGI C, YORKE J. Controlling chaos[J]. Physical Review Letters, 1990, 64: 1196-1199
- [9] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64: 821-824
- [10] YASSEN M T. Controlling chaos and synchronization for new chaotic system using linear feedback control[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2005, 26: 913-920
- [11] LIAO X X, CHEN G R. Chaos synchronization of general Lur'e systems via time-delay feedback control. International [J]. Journal of Bifurcation and Chaos, 2003, 13: 207-213
- [12] KILIC R. Experimental study on impulsive synchronization between two modified Chua's circuits[J]. Nonlinear Analysis-Real World Applications, 2006, 7: 1298-1303
- [13] HAERI M, TAVAZOEI M S, NASEH M R. Synchronization of uncertain chaotic systems using active sliding mode control[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2007, 33: 1230-1239
- [14] Zhi-Hong W X G. Adaptive synchronization between two different hyperchaotic systems [J]. Nonlinear Analysis Nonlinear Analysis, 2008, 24: 1346-1351

Control and Self-adaptive Synchronization of a New Hyper-chaotic System

ZHAO Guo-hui, SHU Yong-lu

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: In this article, we consider the issues of hyper-chaotic control and hyper-chaotic synchronization for a new presented hyper-chaotic system. In the hyper-chaotic control, when the parameter is known, the two controllers are designed scientifically, one is the linear controller, the other is the velocity feedback controller, and sufficient conditions are respectively presented to stabilize the chaotic system to any appointed unstable equilibrium points. The situation before controlling and after controlling is compared, and effective and scientific control is graphically illustrated. In the hyper-chaotic synchronization, when the parameter is unknown, four nonlinear controllers and an adaptive role for estimating the unknown parameter are designed scientifically, and a sufficient condition is presented to assure globally complete synchronization. Theoretical analysis and numerical simulation show that the design is feasible.

Key words: hyper-chaotic control; hyper-chaotic synchronization; linear feedback; speed feedback; self-adaptive synchronization

责任编辑:代小红
校 对:田 静