文章编号: 1672 - 058X (2009) 05 - 0439 - 03

基本解方法在美式看跌期权定价中的应用

唐 耀 宗
(喀什师范学院 数学系, 新疆 喀什 844007)

摘 要:基于对流扩散微分方程的基本解方法 (简记为 MFS方法)求解由欧式期权的 B - S模型,即 B - S微分方程所派生出的标准形式;在考虑了美式期权的特点与 MFS方法的特性之后,将 MFS方法推广到了美式期权的求解;最后给出了实证分析,结果表明用采用 MFS方法可以得到精确、有效的数值解。

关键词:基本解方法;美式看跌期权;对流扩散方程
中图分类号: O241. 82 **文献标志码**: A

期权作为一种金融衍生产品,随着经济及金融市场的发展,重要性与日俱增。1973年,Black和 Scholes两位教授推导出了衍生证券所满足的 B - S模型。当今股票期权市场上占绝大多数的美式股票期权,由于存在提前执行的可能,被归结为一个自由边界问题,不存在解析解。B - S模型是一个偏微分方程,可以被转化为对流扩散方程。此处基于对流扩散方程基本解,提供了一种求解欧式期权定价的 MFS公式,并通过将期权的边界不断更新而推广到美式期权的定价。

1 欧式期权的 MFS定价模型

应用广泛的期权定价模型是 Black - Scholes微分方程:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} + rS\frac{\partial p}{\partial S} - rP = 0 \tag{1}$$

其中,r为无风险利率,σ为股票价格波动率,S为标的股票价格,p为期权价格。对于不支付红利的欧式期权和美式看涨期权这类不提前执行的期权,方程 (1)有求解公式,一般称 black - Scholes期权定价公式。而对于此处所要考虑的可能提前执行的美式看跌期权却没有求解公式,只能用数值方法求解。令:

$$\begin{cases} S = e^x \\ P(S, t) = e^{rt} p(x, t). \end{cases} \tag{2}$$

则可以得到:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

进一步应用如下变量:

$$x = \frac{\sigma y}{\sqrt{2}} \tag{4}$$

收稿日期: 2009 - 04 - 23;修回日期: 2009 - 05 - 21。
作者简介:唐耀宗 (1982 -),男,四川达州人,硕士,从事计算方法及其在经济管理中的应用方面的研究。

得到所需要的标准形式$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+V\frac{\partial p}{\partial y}=0$,其中,$V=\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)$。

由于对流扩散方程$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p}{\partial y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}V_i\frac{\partial p}{\partial y_i}=0$的基本解通过下面的等式表示:

$$\frac{\partial G_n(y,t;s,\tau)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 G_n(y,t;s,\tau)}{\partial y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}V_i\frac{\partial^2 G_n(y,t;s,\tau)}{\partial y_i}=\delta(y,t;s,\tau) \tag{5}$$

其中,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$和$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$分别表示空间场点和源点。对等式(5)作傅立叶和拉普拉斯变换,便可以得到如下形式的基本解:

$$G_n(y,t;s,\tau)=\frac{e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}(s_i-y_i-V_i(\tau-t))^2}{4(\tau-t)}}}{4\pi|\tau-t|^{\frac{n}{2}}}H(\tau-t)$$

其中,$H(\tau-t)$是Heaviside阶梯函数。通过基本解(MFS)方法的基本思想,方程(1)的解可以通过下面一系列的基本解来表示:

$$p(y,t)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k G_n(y,t;s_k,\tau_k) \tag{6}$$

其中,n是源点的个数,第k个源点用$(s_k,\tau_k)=(s_{k1},s_{k2},\cdots,s_{kn},\tau_k)$表示。

这一系列基本解在很多偏微分方程的解空间中都是稠密的。基于扩散方程的基本解,通过MFS方法可以精确而有效地求解扩散方程的数值解。因此,只要适当地选取(s_k,τ_k)和α_k,由$p(y,t)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k G_n(y,t;s_k,\tau_k)$表示的解应该可以收敛于对流扩散方程$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p}{\partial y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}V_i\frac{\partial p}{\partial y_i}=0$的任意解。

为了获得未知源点(s_k,τ_k)以及系数α_k,即需要加上所求解问题本身的相应终边值条件。将基本解$p(y,t)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k G_n(y,t;s_k,\tau_k)$代入终边值条件(由收益函数求得),即产生一个线性代数方程组,求解该方程组,则得到系数α_k。

对于单项资产的欧式期权,其收益函数为$F(S,X)=\max\{X-S,0\}$。经过正规变换,边界条件可以变换为:

$$P(y,t)=\begin{cases}Xe^{-rT}, & S\to-\infty\\ 0, & S\to\infty\end{cases}$$

同时,终值条件可以变换为$P(y,T)=e^{-rT}\max\{X-S(y),0\}$.

将$B-S$方程标准形式以及上述终边值条件结合,便形成了标准控制方程,即终边值方程。给场点N:$(y_1,y_2,\cdots,y_N)$分配终值条件,得到线性方程组。解出系数α_k后,所要求的解就可以通过基本解序列式(6)得出。

2 美式期权的MFS方法

为了满足美式期权提前执行的可能,其定价模型的自由边界条件需满足如下条件:$P(S,t)=\max\{F(S,X),P(S,t)\}$。其中,$F(S,X)$是收益函数。美式期权的数值解可以通过不断更新其边界而获得,方法如下:

步骤1:选定一个合适的时间步长$\Delta t=\frac{T}{M}$;

步骤2:求解以等式$P(S,t)=\max\{F(S,X),P(S,t)\}$为终值条件的欧式期权模型,得到时刻$t\in[T-\Delta t,T]$数值解$P^{(1)}(S,t)$;

步骤 3:对时刻 $t = T - k\Delta t$,用 $P(S, t) = \max\{F(S, X), P^{(k)}(S, T - k\Delta t)\}$更新其终值条件,其中 k是时间所经过的步长数;

步骤 4:求解欧式期权,获得时刻 $t \in [T - k\Delta t, T - (k - 1)\Delta t]$的数值解 $P^{(k)}(S, t)$;

步骤 5:重复步骤 3和步骤 4直到 $k = M$。

3　实证分析

通过以下两个模型,验证基于对流扩散基本解的 MFS数值方法的有效性。对于欧式期权,将数值解与 B - S方程的解析解进行比较,以验证其有效性;而对于美式期权,则可以通过将数值解与其他方法的数值解以及实际值比较而验证其实用性及有效性。1)考虑到期时间为 0.5,执行价格为 10,无风险利率为 0.05,波动率为 0.2的欧式看跌期权。2)对 Apple C股票的美式看跌期权期权进行研究,期权报价数据来源于 The Wall Street Journal 2005年 5月 12日的报价,而相关的 Apple C股票价格均来源于雅虎金融网站。Apple C股票初始价格为 34.13美元 (为收盘价),针对其不同执行价格及不同到期时间的美式看跌期权进行研究。其中无风险利率取为 0.04(通过查询知道美国国债利率在 0.02到 0.04之间,而且利率在此范围内取什么值,几乎没有影响),波动率为 0.348 5,采用 2005年 2月 28日到 2005年 5月 11日的历史股票的价格计算而得到的。

表 1　欧式期权的 MFS求解

股价	准确值	$\Delta t = T$	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.05$	$\Delta t = 0.02$
2	7.753 100	7.753 030	7.752 970	7.752 770	7.752 260
8	1.798 710	1.799 160	1.799 120	1.799 080	1.799 030
10	0.441 972	0.448 754	0.448 806	0.448 852	0.448 915
15	0.000 558	0.000 707	0.000 707	0.000 708	0.000 709
16	0.000 103	0.000 138	0.000 137	0.000 137	0.000 137
RMS	0.000 000	0.003 033	0.003 040	0.003 051	0.003 075

表 2　Apple C股票美式期权

执行价格	到期时间	实际值	Binomial	Implicit	MFS	误差 (MFS)
30	Jun	0.40	0.425 1	0.411 4	0.402 5	0.006 3
32.50	Jun	1	1.113 8	1.065 5	1.032 9	0.032 9
35	Jun	2.25	2.570 3	2.444 6	2.332 9	0.036 8
35	Jul	2.95	2.991 9	2.955 9	2.936 3	0.004 6
37.50	Jul	4.30	4.897 8	4.607 2	4.519 1	0.051 0
40	May	6	6.340 0	6.168 0	6.092 5	0.015 4
42.50	Jun	8.20	8.985 0	8.848 5	8.695 6	0.060 4
42.50	Jul	8.60	9.192 2	9.026 9	8.842 5	0.028 2
45	Jul	10.20	11.478 7	11.281 6	11.176 3	0.095 7

参考文献:

[1] JOHN C, HULL. 期权、期货和其它衍生品 [M]. 张陶伟 译. 北京:华夏出版社, 1999
[2] 王燕昌,李进. 无单元方法的研究进展 [J]. 宁夏大学学报:自然科学版, 2003, 24(1): 42-46
[3] 张雄,宋康祖,陆明万. 无网格法研究进展及其应用 [J]. 计算力学学报, 2003, 20(6): 730-742
[4] 张延军,王恩志. 新型无网格法 (MLS方形域法)的研究及其应用 [J]. 岩土工程学报, 2006, 28(7): 886-890
[5] TSAI C C, YOUNG D L. The method of fundamental solutions for solving options pricing models[J]. Applied Mathematics and

Computation, 2006, 181: 390-401

[6] HON Y C, MAO X Z A radial basis function method for solving options pricing model [J]. Financial Engineering, 1999(8): 31-49

The application of the method of fundamental solutions for solving American put options

TANG Yao-zong

(Department of Mathematics, Kashgar Teachers' College, Xinjiang Kashgar 844007, China)

Abstract: Based on the convection-diffusion fundamental solution method, the resulted canonical form of the European-style option's pricing model: B-S differential equation, has been solved. Also, the MFS method has been expanded to the American option of single asset after considering the characteristics of MFS and American option. Finally, numerical examples, showed the efficiency and practicability of the algorithm.

Key words: the MFS method; American put options; convection-diffusion equation;

责任编辑:李翠薇

(上接 438页)

参考文献:

[1] 王远民. 中值定理"中间点"渐进性的定量刻画 [J]. 河南科学, 2008, 26(2): 131-134

[2] 高丽. 微分中值定理中 ξ的渐进性质 [J]. 河南科学, 2006, 24(2): 172-173

[3] 游学民. 关于 Cauchy中值定理"中值点"的渐进性的讨论 [J]. 长春师范学院学报, 2004, 23(2), 16-18

[4] 彭培让. 中值定理中的渐进性 [J]. 河南教育学院学报:自然科学版, 2007, 16(4): 6-7

[5] 华东师范大学数学系. 数学分析 [M]. 北京:高等教育出版社, 1991

Research into progressiveness of intermediate point of Lagrange mean value theorem

SHUAI Yan-dan

(School of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper makes qualitative research on the progressiveness of the intermediate point of Largrange mean value theorem. By studying the situation of f(x) in (a, b) low order derivableness, we found that f(x) in (a, b) low order derivative can be popularized to the situation of n order continuous derivableness, furthermore, that positive integer n can be popularized to positive real number m, a more generalized conclusion is arrived at: $\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\sqrt[m]{\frac{1}{m+1}}$.

Key words: Lagrange mean value theorem; intermediate point; progressiveness

责任编辑:李翠薇