文章编号: 1672 - 058X(2009)05 - 0437 - 02

Lagrange中值定理“中间点”的渐进性

帅雁丹
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 401331)

摘 要:对 Lagrange中值定理“中间点”的渐进性作了定性研究. 通过对 $f(x)$在 (a, b)内低阶可导情形的研究,发现规律,即把 $f(x)$在 (a, b)内低阶可导可推广至 n阶连续可导的情形,进而把正整数 n推广到正实数 m,并得到了更一般性的结论: $\lim\limits_{b\to a}\frac{\xi - a}{b - a} = \sqrt[m]{\frac{1}{m+1}}$.

关键词: Lagrange中值定理;中间点;渐进性
中图分类号: O172.1 **文献标志码**: A

定理 1 若函数 $f(x)$在 (a, b)内二阶连续可导,且 $f''(a)\neq 0$,则对 Lagrange中值定理 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)\ (a<\xi<b)$中的 ξ有 $\lim\limits_{b\to a}\frac{\xi - a}{b - a} = \frac{1}{2}$.

证明 由泰勒公式,得:

$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + o(b-a)^2$,由 Lagrange中值定理,有:

$$f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + o(b-a)^2 = f'(\xi)(b-a)$$

$$\frac{f'(\xi)(b-a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} = \frac{1}{2}f''(a) + \frac{o(b-a)^2}{(b-a)^2}$$

令 $b\to a$,得 $\lim\limits_{b\to a} f''(a)\frac{\xi - a}{b - a} = \frac{1}{2}f''(a)$,因为 $f''(a)\neq 0$所以 $\lim\limits_{b\to a}\frac{\xi - a}{b - a} = \frac{1}{2}$.

定理 2 若函数 $f(x)$在 (a, b)内三阶连续可导, $f''(a) = 0$,且 $f^{(3)}(a)\neq 0$,则对 Lagrange中值定理 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)\ (a<\xi<b)$中的 ξ有 $\lim\limits_{b\to a}\frac{\xi - a}{b - a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

证明 由泰勒公式及定理条件,得:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(3)}(a+\theta(x-a))}{3!}(x-a)^3,\ 0<\theta<1$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(3)}(a+\theta(b-a))}{3!}(b-a)^3$$

$$f'(x) = f'(a) + \frac{f^{(3)}(a+\theta(x-a))}{2!}(x-a)^2$$

$$f'(\xi) = f'(a) + \frac{f^{(3)}(a+\theta(\xi-a))}{2!}(\xi-a)^2$$

由 Lagrange中值定理有:

$$f'(a)(b-a) + \frac{f^{(3)}(a+\theta(b-a))}{3!}(b-a)^3 = f'(a)(b-a) + \frac{f^{(3)}(a+\theta(\xi-a))}{2!}(\xi-a)^2(b-a)$$

收稿日期: 2009 - 07 - 01;**修回日期**: 2009 - 05 - 20.
作者简介:帅雁丹 (1987 -),女,四川乐山人,在读本科生,从事数学应用研究.

整理得 $\frac{(\xi-a)^2}{(b-a)^2}f^{(3)}(a+\theta(\xi-a))=\frac{1}{3}f^{(3)}(a+\theta(b-a))$.

令 $b\to a$,得 $\lim\limits_{b\to a}\frac{(\xi-a)^2}{(b-a)^2}=\frac{1}{3}$,即 $\lim\limits_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

分析定理 1, 2中的条件,可以发现 $f(x)$的导数皆有规律可循,对于 $f(x)$在 (a,b)内二阶连续可导和三阶连续可导的情形可推广至 n阶连续可导,于是得到如下结论:

定理 3 函数 $f(x)$在 (a,b)内 $n+1$阶连续可导,$f^{(k)}(a)=0$ $(k=2,3,\cdots,n)$,且 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$,则对 Lagrange中值定理 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ $(a<\xi<b)$中的 ξ有 $\lim\limits_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$.

证明 由泰勒公式和定理条件,得:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ 0<\theta<1 \tag{1}$$

把 b代入式 (1),得 $f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$.

对 $f(x)$求导,得:

$$f'(x)=f'(a)+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

$$f'(\xi)=f'(a)+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(\xi-a))}{n!}(\xi-a)^n$$

由 Lagrange中值定理,得:

$$f'(a)(b-a)+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}=f'(a)(b-a)+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(\xi-a))}{n!}(\xi-a)^n(b-a) \tag{2}$$

式 (2)两边同除以 $(a+b)^{n+1}$,整理得:

$$\frac{(\xi-a)^n}{(b-a)^n}f^{(n+1)}(a+\theta(\xi-a))=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))$$

令 $b\to a$,得 $\lim\limits_{b\to a}f^{(n+1)}(a)\left(\frac{\xi-a}{b-a}\right)^n=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)$,因为 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$,所以 $\lim\limits_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$.

若把定理 3中的正整数推广为正实数,把具有有关高阶导数的要求放宽,将会得到条件较弱,更具一般性的定理.

定理 4 设函数 $f(x)$在 $[a,b]$内具有一阶可导,且 $f'(x)-f'(a)$是 $x-a$的 m $(m>0)$阶无穷小,则对 Lagrange中值定理 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ $(a<\xi<b)$中的 ξ有 $\lim\limits_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\sqrt[m]{\frac{1}{m+1}}$.

证明 不妨设 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=M$,令 $g(b-a)=\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{(b-a)^{(m+1)}}$.则由洛比达法则和定理 4条件,有 $\lim\limits_{b\to a}g(b-a)=\frac{1}{m+1}\lim\limits_{b\to a}\frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^m}=\frac{M}{m+1}$.又由定理 4条件和拉格郎日中值定理知 $\exists\,\xi\in(a,b)$, s t $g(b-a)=\frac{f'(\xi)-f'(a)}{(b-a)^m}$,从而有:

$$\lim_{b\to a}\frac{f'(\xi)-f'(a)}{(b-a)^m}=\frac{M}{m+1}$$

$$\lim_{b\to a}\frac{f'(\xi)-f'(a)}{(\xi-a)^m}\left(\frac{\xi-a}{b-a}\right)^m=\frac{M}{m+1}$$

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\sqrt[m]{\frac{1}{m+1}}$$

注记: Rolle中值定理是 Lagrange中值定理的特殊情形,故 Rolle中值定理“中间点”也有上述渐进性质.

(下转第 442页)

Computation, 2006, 181: 390-401

[6] HON Y C, MAO X Z. A radial basis function method for solving options pricing model [J]. Financial Engineering, 1999(8): 31-49

The application of the method of fundamental solutions for solving American put options

TANG Yao-zong

(Department of Mathematics, Kashgar Teachers' College, Xinjiang Kashgar 844007, China)

Abstract: Based on the convection-diffusion fundamental solution method, the resulted canonical form of the European-style option's pricing model: B-S differential equation, has been solved. Also, the MFS method has been expanded to the American option of single asset after considering the characteristics of MFS and American option. Finally, numerical examples, showed the efficiency and practicability of the algorithm.

Key words: the MFS method; American put options; convection-diffusion equation;

责任编辑:李翠薇

(上接 438页)

参考文献:

[1] 王远民. 中值定理“中间点”渐进性的定量刻画 [J]. 河南科学, 2008, 26(2): 131-134

[2] 高丽. 微分中值定理中 ξ的渐进性质 [J]. 河南科学, 2006, 24(2): 172-173

[3] 游学民. 关于 Cauchy中值定理“中值点”的渐进性的讨论 [J]. 长春师范学院学报, 2004, 23(2), 16-18

[4] 彭培让. 中值定理中的渐进性 [J]. 河南教育学院学报:自然科学版, 2007, 16(4): 6-7

[5] 华东师范大学数学系. 数学分析 [M]. 北京:高等教育出版社, 1991

Research into progressiveness of intermediate point of Lagrange mean value theorem

SHUAI Yan-dan

(School of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper makes qualitative research on the progressiveness of the intermediate point of Largrange mean value theorem. By studying the situation of f(×) in (a, b) low order derivableness, we found that f(x) in (a, b) low order derivative can be popularized to the situation of n order continuous derivableness, furthermore, that positive integer n can be popularized to positive real number m, a more generalized conclusion is arrived at: $\lim_{b\to a}\frac{\xi - a}{b - a}\ \sqrt[m]{\frac{1}{m+1}}$.

Key words: Lagrange mean value theorem; intermediate point; progressiveness

责任编辑:李翠薇