文章编号: 1672 - 058X(2009) 05 - 0434 - 03

# 赋范空间中有限个渐近一致 φ-伪压缩映象公共不动点的迭代逼近

王　兵
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

**摘　要**:设 $X$ 是一实赋范空间, $D$ 是 $X$ 的非空凸子集. $T_i: D\to D\ (i=1, 2, \cdots, m)$ 是 $m$ 个渐近一致 φ-伪压缩的一致 $L$-Lipschitzian映象. 证明了在一定条件下,关于 $\{x_n\}$ 的迭代: $x_{n+1}=(1-\alpha_{1,n})x_n+\alpha_{1,n}T_1^n y_{1,n}$; $y_{1,n}=(1-\alpha_{2,n})x_n+\alpha_{2,n}T_2^n y_{2,n}$; $\cdots$; $y_{m-1,n}=(1-\alpha_{m,n})x_n+\alpha_{m,n}T_m^n x_n$, $\forall n\geq 0$ 强收敛于有限个渐近一致 φ-伪压缩的一致 $L$-Lipschitzian映象 $T_i\ (i=1, 2, \cdots, m)$ 的公共不动点.

**关键词**:渐近一致 φ伪压缩映象;迭代序列;不动点;赋范线性空间
**中图分类号**: O177. 91　　　**文献标志码**: A

## 1　预备知识

设 $X$ 是一实赋范空间, $X^*$ 是 $X$ 的对偶空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $X$ 与 $X^*$ 之间的广义对偶对. 映象 $J: X\to 2^{X^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象 $J(x)=\{f\in X^*: \langle x, f\rangle=\|x\|^2=\|f\|^2\}, \forall x\in X$.

**定义 1**[1]　设 $D$ 是 $X$ 的一非空子集, $T: D\to D$ 是一映象, $\phi: [0, \infty)\to[0, \infty)$ 是一严格增加的函数,满足 $\phi(0)=0$.

(1) $T$ 称为渐近伪压缩的,如果存在一实数列 $\{k_n\}\subset[1, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$, 且对于 $\forall x, y\in D$, 存在 $j(x-y)\in J(x-y)$, 使得 $\langle T^n x-T^n y, j(x-y)\rangle\leq k_n\|x-y\|^2, \forall n\geq 1$;

(2) $T$ 称为 φ-伪压缩的,如果存在一点 $x^*\in D$, 使得 $\forall x\in D$, 存在 $j(x-x^*)\in J(x-x^*)$, 满足 $\langle Tx-x^*, j(x-x^*)\rangle\leq\|x-x^*\|^2-\phi(\|x-x^*\|)$;

(3) $T$ 称为一致 φ-伪压缩的,如果存在一点 $x^*\in D$, 使得 $\forall x\in D$, 存在 $j(x-x^*)\in J(x-x^*)$, 满足 $\langle T^n x-x^*, j(x-x^*)\rangle\leq\|x-x^*\|^2-\phi(\|x-x^*\|), \forall n\geq 1$;

(4) $T$ 称为渐近一致 φ-伪压缩的,如果存在一点 $x^*\in D$ 及一实数列 $\{k_n\}\subset[1, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$, 使得对 $\forall x\in D$, 存在 $j(x-x^*)\in J(x-x^*)$, 满足 $\langle T^n x-x^*, j(x-x^*)\rangle\leq k_n\|x-x^*\|^2-\phi(\|x-x^*\|), \forall n\geq 1$.

易知,当 $k_n\equiv 1$ 时,一致 φ-伪压缩映象是渐近一致 φ-伪压缩的; φ-伪压缩映象也是一致 φ-伪压缩映象当 $n=1$ 时的特例.

下面给出迭代序列.

**定义 2**　设 $X$ 是一实赋范空间, $D$ 是 $X$ 的非空凸子集. $x_0\in D$ 是任意给定的点, $T_i: D\to D\ (i=1, 2, \cdots, m)$ 是 $m$ 个渐近一致 φ-伪压缩的一致 $L$-Lipschitzian映象. 定义序列 $\{x_n\}$ 的迭代如下:

$$x_{n+1}=(1-\alpha_{1,n})x_n+\alpha_{1,n}T_1^n y_{1,n}$$
$$y_{1,n}=(1-\alpha_{2,n})x_n+\alpha_{2,n}T_2^n y_{2,n}$$
$$\cdots$$

**收稿日期**: 2009 - 05 - 20;**修回日期**: 2009 - 06 - 20.
**作者简介**:王兵 (1981-),男,四川安岳人,在读硕士研究生,从事不动点研究.

$$y_{m-1,n} = (1-\alpha_{m,n})x_n + \alpha_{m,n}T_m^n x_n \ (\forall n \geq 0) \tag{1}$$

其中 $\{\alpha_{i,n}\} \subset [0,1]$; $i=1,2,\cdots,m$; $\forall n \geq 0$.

下面给出几个引理.

引理 1[2]　设 $\{a_n\}\{b_n\}$是两个非负实数构成的序列且满足 $a_{n+1} \leq (1+\lambda_n)a_n + b_n$, $\forall n \geq n_0$,其中 $\{\lambda_n\} \subset (0,1)$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n < \infty$. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$,那么 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在.

引理 2[2]　设 $\{\theta_n\}$是由非负实数构成的序列,$\{\lambda_n\}$是一实序列,且满足 $0 \leq \lambda_n \leq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n = \infty$. 若存在一个严格递增函数 $\phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$,且 $\phi(0)=0$,使得 $\theta_{n+1}^2 \leq \theta_n^2 - \lambda_n\phi(\theta_{n+1}) + \sigma_n$, $\forall n \geq n_0$,其中 $n_0$ 是某个非负实数,$\{\sigma_n\}$是由非负实数构成的序列,且 $\sigma_n = 0(\lambda_n)$,则当 $n\to\infty$时,$\theta_n \to 0$.

引理 3[3]　设 $X$是一实赋范空间,$J: X \to 2^{X^*}$是正规对偶映象,则对于任意的 $x, y \in X$有:

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, j(x+y)\rangle, \ \forall j(x+y) \in J(x+y)$$

## 2　主要结果

定理 1　设 $D$是赋范空间 $X$的非空凸子集,$T_i: D \to D\ (i=1,2,\cdots,m)$是 $m$个渐近一致 φ-伪压缩的一致 $L$-Lipschitzian映象. $F(T_i)$表示 $T_i$的不动点集且 $\bigcap_{i=1}^{m}F(T_i) \neq \varnothing$, $x^*$是 $T_i$的一个公共不动点. 序列 $\{k_n\} \subset [1,\infty)$且 $\lim_{n\to\infty}k_n = 1$; $\{\alpha_{i,n}\} \subset [0,1]$; $i=1,2,\cdots,m$; $\forall n \geq 0$且满足:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{i,n} = \infty$;　　2) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{i,n}^2 < \infty$;　　3) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{i,n}(k_n - 1) < \infty$.

任取 $x_0 \in D$,设 $\{x_n\}$是由式 (1)定义的迭代序列. 若存在一个严格递增函数 $\phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$,且 $\phi(0)=0$,使得 $\langle T_i^n x - x^*, j(x-y)\rangle \leq k_n\|x-x^*\|^2 - \phi(\|x-x^*\|)$,那么 $\{x_n\}$强收敛到 $x^*$. $\forall j(x-x^*) \in J(x-x^*)$; $\forall x \in D$; $i=1,2\cdots,m$; $\forall n \geq 0$.

证明　首先证明 $\{x_n\}$有界. 一般地,不妨设 $\alpha_n = \max\{\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \cdots, \alpha_{m,n}\}\ (\forall n \geq 0)$,则:

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &= \|(1-\alpha_{1,n})(x_n - x^*) + \alpha_{1,n}(T_1^n y_{1,n} - x^*)\|^2 \leq \\
&(1-\alpha_{1,n})^2\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_{1,n}[T_1^n y_{1,n} - x^*, j(x_{n+1}-x^*)] = \\
&(1-\alpha_{1,n})^2\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_{1,n}[T_1^n x_{n+1} - x^*, j(x_{n+1}-x^*)] + 2\alpha_{1,n}[T_1^n y_{1,n} - T_1^n x_{n+1}, j(x_{n+1}-x^*)] \leq \\
&(1-\alpha_{1,n})^2\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_{1,n}\{k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2 - \phi(\|x_{n+1}-x^*\|)\} + 2\alpha_{1,n}L\|y_{1,n} - x_{n+1}\|\|x_{n+1}-x^*\|
\end{aligned} \tag{2}$$

而

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - y_{1,n}\| &= \|(1-\alpha_{1,n})(x_n - y_{1,n}) + \alpha_{1,n}(T_1^n y_{1,n} - y_{1,n})\| \leq \\
&\|(1-\alpha_{1,n})\|x_n - y_{1,n}\| + \alpha_{1,n}\|T_1^n y_{1,n} - x_n + x_n - y_{1,n}\| \leq \\
&(1-\alpha_{1,n})\|x_n - y_{1,n}\| + \alpha_{1,n}(1+L)\|x_n - y_{1,n}\| = \\
&(1+\alpha_{1,n}L)\|x_n - y_{1,n}\| \leq (1+\alpha_nL)\|y_{1,n} - x_n\| \leq \\
&(1+\alpha_nL)\alpha_nL\|y_{2,n} - x_n\| \leq \\
&\cdots \leq \alpha_n(1+\alpha_nL)(\alpha_nL)^{m-1}\|T_m^n x_n - x_n\| \leq \\
&\alpha_n(1+\alpha_nL)(\alpha_nL)^{m-1}(\|T_m^n x_n - x^*\| + \|x_n - x^*\|) \leq \\
&\alpha_n(1+\alpha_nL)(1+L)(\alpha_nL)^{m-1}\|x_n - x^*\|
\end{aligned} \tag{3}$$

此时,设 $\alpha_n = \alpha_{1,n}$,将式 (3)代入式 (2)有:

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 \leq\ &(1-\alpha_n)^2\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n\{k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2 - \phi(\|x_{n+1}-x^*\|)\} + \\
&2\alpha_n^2(1+\alpha_nL)(1+L)(\alpha_nL)^{m-1}\|x_n - x^*\|\|x_{n+1}-x^*\| \leq \\
&(1-\alpha_n)^2\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n\{k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2 - \phi(\|x_{n+1}-x^*\|)\} + \\
&\alpha_n^2(1+\alpha_nL)(1+L)(\alpha_nL)^{m-1}(\|x_n - x^*\|^2 + \|x_{n+1}-x^*\|^2)
\end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2 < \infty$,故 $\alpha_n \to 0\ (n\to\infty)$,同时 $L$为一常数,故存在 $M > 0$,使得 $(1+\alpha_nL)(1+L)(\alpha_nL)^{m-1} \leq M$,从而上式变成:

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 \leq\ &(1-\alpha_n)^2\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n\{k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2 - \\
&\phi(\|x_{n+1}-x^*\|)\} + \alpha_n^2M(\|x_n - x^*\|^2 + \|x_{n+1}-x^*\|^2)
\end{aligned} \tag{4}$$

即有:

$$(1-2\alpha_n k_n-\alpha_n^2M)\|x_{n+1}-x^*\|^2\le(1-2\alpha_n+\alpha_n^2+\alpha_n^2M)\|x_n-x^*\|^2-2\alpha_n\phi(\|x_{n+1}-x^*\|) \quad (5)$$

由于 $\alpha_n\to0$, $k_n\to1(n\to\infty)$,故存在正整数 $n_0$,使得当 $n\ge n_0$,有 $1-2\alpha_n k_n-\alpha_n^2M>0$,于是式(5)变成:

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\le\frac{A_n}{B_n}\|x_n-x^*\|^2-\frac{2\alpha_n}{B_n}\phi(\|x_{n+1}-x^*\|)=$$

$$[1+\frac{2\alpha_n(k_n-1)+\alpha_n^2(1+2M)}{B_n}]\|x_n-x^*\|^2-\frac{2\alpha_n}{B_n}\phi(\|x_{n+1}-x^*\|) \quad (6)$$

其中 $A_n=1-2\alpha_n+\alpha_n^2+\alpha_n^2M$, $B_n=1-2\alpha_n k_n-\alpha_n^2M$. 同时存在正整数 $n_1$,对所有的 $n\ge n_1$,均有 $\frac{1}{2}<B_n\le1$,从而式(6)有:

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\le\{1+2[2\alpha_n(k_n-1)+\alpha_n^2(1+2M)]\}\|x_n-x^*\|^2-2\alpha_n\phi(\|x_{n+1}-x^*\|) \quad (7)$$

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\le\{1+2[2\alpha_n(k_n-1)+\alpha_n^2(1+2M)]\}\|x_n-x^*\|^2$$

由定理1的条件2)和3)知:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}[2\alpha_n(k_n-1)+\alpha_n^2(1+2M)]<\infty$$

根据引理1知 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$ 存在,故序列 $\{\|x_n-x^*\|\}$ 有界.

一般地,不妨设存在 $\bar{M}>0$,使得 $\|x_n-x^*\|^2\le\bar{M}$. 接下来考虑式(7),并证明 $x_n\to x^*(n\to\infty)$.

取 $\theta_n=\|x_n-x^*\|$, $\lambda_n=2\alpha_n$, $\sigma_n=2[2\alpha_n(k_n-1)+\alpha_n^2(1+2M)]\bar{M}$,则有 $\theta_{n+1}^2\le\theta_n^2-\lambda_n\phi(\theta_{n+1})+\sigma_n$, $\forall n\ge n_0$. 根据定理1的条件1)、2)和3)知引理2的条件都满足,从而 $\|x_n-x^*\|\to0$,故 $x_n\to x^*(n\to\infty)$,完成了定理的证明.


参考文献:

[1] 谷峰. 赋范空间中渐近一致 φ - 伪压缩型映象不动点的迭代逼近[J]. 数学实践与认识, 2006, 37(3): 282-287

[2] LIU L S. Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, 194: 114-125

[3] ZHOU H Y, CHO Y J. Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear φ-strongly quasi - accretive mappings in normed linear spaces[J]. J Korean Math Soc, 1999, 36(6): 1061-1073

[4] 张石生, 谷峰, 张晓岚. 伪压缩型映象迭代逼近的收敛性问题[J]. 四川大学学报, 2000, 37(6): 795-802

[5] 张石生. Φ - 伪压缩映象的具有误差的 Ishikawa 和 Mann 迭代程序的收敛性问题[J]. 应用数学与力学, 2000(21): 1-10


# Approximating fixed point of a finite family of asymptotically identical Φ-pseudo contractive mapping by iteration processes in normed linrear spaces


**WANG Bing**

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)



**Abstract:** Let $X$ be a normed linear space, $D$ be a nonempty convex subset of $X$. Let $T_i: D\to D$ $(i=1,2\cdots m)$ be asymptotically identicai Φ-pseudo contractive type mappings with common fixed points. It is shown that under some suitable conditions, the sequence $\{x_n\}$ defined as follows; $x_{n+1}=(1-\alpha_{1,n})x_n+\alpha_{1,n}T_1^n y_{1,n}$; $y_{1,n}=(1-\alpha_{2,n})x_n+\alpha_{2,n}T_2^n y_{2,n}$; $\cdots$; $y_{m-1,n}=(1-\alpha_{m,n})x_n+\alpha_{m,n}T_m^n x_n$, $\forall n\ge0$. Then it converges strongly to the fixed point of $T_i$ $(i=1,2\cdots m)$.



**Key words:** asymptotically identical Φ-pseudo contractive type mapping; iterative sequence; fixed point; normed linear spaces



责任编辑:李翠薇