文章编号: 1672 - 058X(2009) 05 - 0429 - 05

随机微分方程的非参数估计及其在股票指数中的应用*

张德飞[1],段星德[2]
(1. 红河学院 数学学院, 云南 蒙自 661100; 2. 楚雄师范学院, 云南 楚雄 675000)

摘 要:建立了股票指数的随机微分方程模型,采用非参数估计方法对其进行估计,并给出了相应的非参数估计表达式,接着给出了具体的非参数估计算法,最后利用上证指数的收盘价数据进行实证分析,实证表明该模型能较好的刻画股票指数的许多统计特征,非参数估计方法也切实有效,模拟效果较好,能较好的预测股票指数的未来趋势。

关键词:随机微分方程;非参数估计;股票指数

中图分类号: F224. 0 **文献标志码**: A

近年来,非参数时间序列分析引起了国内外统计学者的极大关注, 并发展了一些较成功的估计方法。许多研究者提出了各种关于随机微分方程的漂移函数和扩散函数的非参数估计方法。1997年, Stanton开创性的使用核函数的方法来近似估计随机过程中的期望函数,从而得到漂移函数和扩散函数的非参数估计,后来 Boudoukh(1998)等人作了相应的推广; Bandi, Phillips (2003), Nicolau(2003), Gobet, Hoffmann, Reβ (2004)等人对一阶随机微分方程的非参数估计问题进行了深入的研究; Nicolau J. (2007)对二阶随机微分方程的非参数估计问题也做了很多工作[1 - 5];而 Ait - Sahalia(2002), Kessler(1997)对随机微分方程的参数估计和半参数估计方法进行了详细的讨论。非参数估计方法在利率模型 (Hong Y., H. Li (2005))、波动率分析 (Broto C., Ruiz E. (2004), Renò R. (2007))、衍生资产的定价 (Renò R. (2007), Zhibiao Zhao(2008))等方面有着重要的作用[6 - 13],此处将对随机微分方程的漂移函数和扩散函数进行非参数估计,并将其应用于股票指数的分析和预测。

1 模型的提出

在股票市场里,股票指数的变化受诸多因素的影响,假设其过程服从以下的随机微分方程:

$$\begin{cases} dP_t = \mu(P_t)\,dt + \sigma(P_t)\,dW_t \\ R_t = P_t - P_{t-1} \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2009 - 06 - 08;**修回日期**: 2009 - 07 - 01。
* **基金项目**:红河学院博士、硕士启动基金项目 (XSS07001)。
作者简介:张德飞 (1980 -),男,云南楚雄人,助教,硕士研究生,从事金融数学研究。

其中 $\log p_t$ 表示标的资产价格的对数,记 $P_t = \log p_t$, R_t 表示资产的收益率, $\mu(P_t)$ 表示漂移函数, $\sigma(P_t)$ 表示扩散函数, W_t 是标准布朗运动。目前大多数模型都可以经过把 $\mu(P_t)$ 和 $\sigma(P_t)$ 具体化而得到,例如取 $\mu(P_t) = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_t + \alpha_3 P_t^{-1}$, $\sigma(P_t) = \sigma P_t^{\lambda}$ 就得到 Ait-Sahalia (1996)的模型,其漂移函数和扩散函数都是 P_t 的非线性函数,若 $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\lambda = 0$ 则可以得到 Vasicek (1977)模型,若 $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\lambda = 1$ 则是 Courtadon (1982)模型,若 $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\lambda = 1/2$ 则是 Cox, Ingersoll和 Ross(CIR) (1985)模型,若 $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ 则得到 Chan, Karolyi, Longstaff和 Sanders (1992)的 CEV模型。

2 非参数估计方法

对于模型 (1)中漂移函数 $\mu(P_t)$ 和扩散函数 $\sigma(P_t)$,采用非参数的方法对其进行估计,主要是因为非参数估计方法对 $\mu(P_t)$ 和 $\sigma(P_t)$ 的具体形式没有限制。在一系列的假设条件下[10-15], Florens-Zmirou (1993), Ait-Sahalia (1996), Jiang Knight (1997), Stanton (1997) 以及 Bandi and Phillips (2003)给出了它们的估计式。Stanton (1997)给出的估计式如下:

假设考虑的样本区间为 $[0, T]$,记 $\delta = T/n$,则:

$$\hat{\mu}(x) = \frac{1}{\delta} \frac{\sum_{t=0}^{n-1} (P_{(t+1)\delta} - P_{t\delta}) K_h (P_{t\delta} - x)}{\sum_{t=0}^{n-1} K_h (P_{t\delta} - x)} \tag{2}$$

$$\hat{\sigma}^2(x) = \frac{1}{\delta} \frac{\sum_{t=0}^{n-1} (P_{(t+1)\delta} - P_{t\delta})^2 K_h (P_{t\delta} - x)}{\sum_{t=0}^{n-1} K_h (P_{t\delta} - x)}, \tag{3}$$

其中 $K(\cdot)$ 是正的、对称的、连续可微的核密度函数,并且满足 $\int_R K(u)\,du = 1$, $\int_R uK(u)\,du = 0$, $\int_R K^2(u)\,du < \infty$, $K_h(u) = \frac{1}{h} K\left(\frac{u}{h}\right)$;常见的有正态核函数、Epanechnikov核函数等。可以证明:当 $h \to 0$, $Th \to \infty$, $\delta \to 0$ 时, $\hat{\mu}(x) \xrightarrow{p} \mu(x)$; $\hat{\sigma}^2(x) \xrightarrow{p} \sigma^2(x)$。

3 实证分析及其结果

在实际应用中,对于随机微分方程往往采用非参数的极大似然方法进行处理,假设 $p(t_i, x_i; (t_{i-1}, x_{i-1}), \theta)$ 是从 x_{i-1} 到 x_i 的转移密度函数,那么 θ 的极大似然函数就为 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(t_i, x_i; (t_{i-1}, x_{i-1}), \theta)$,下面根据以下步骤采用蒙特卡洛模拟方法对 $L(\theta)$ 进行估计:

(1) 假设考虑时间区间为 $[t_{i-1}, t_i]$,则把该区间插入 M 个长度为 $h = (t_i - t_{i-1})/M$ 的子区间,那么方程 $dX_t = \mu(t, X_t; \theta)\,dt + \sigma(t, X_t; \theta)\,dW_t$ $(X_0 = x_0)$ 通过利用 Euler-Maruyama算法就可以得到 X 在 t_i 处的近似值,

这样重复 R次就可以得到 X在 t_i处的 R个值,记为 $X_{t_i}^1, \cdots, X_{t_i}^r, \cdots, X_{t_i}^R$,即 $X_{t_i}^r$就是 X在 t_i处的第 r次模拟值 $(r=1, \cdots, R)$;

(2) 用第一步得到的 $X_{t_i}^1, \cdots, X_{t_i}^r, \cdots, X_{t_i}^R$构造非参数的核密度函数来估计转移密度函数.

$$p^R(t_i, x_i; (t_{i-1}, x_{i-1}), \theta) = \frac{1}{R h_i}\sum_{r=1}^{R} K\left(\frac{x_i - X_{t_i}^r}{h_i}\right) \tag{4}$$

其中 h_i表示在 t_i处的带宽,常取 $h_i = (4/3)^{1/5} s_i R^{-1/5}$, s_i表示 $X_{t_i}^1, \cdots, X_{t_i}^r, \cdots, X_{t_i}^R$的标准差;$K(\cdot)$表示核函数,常取 $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$;

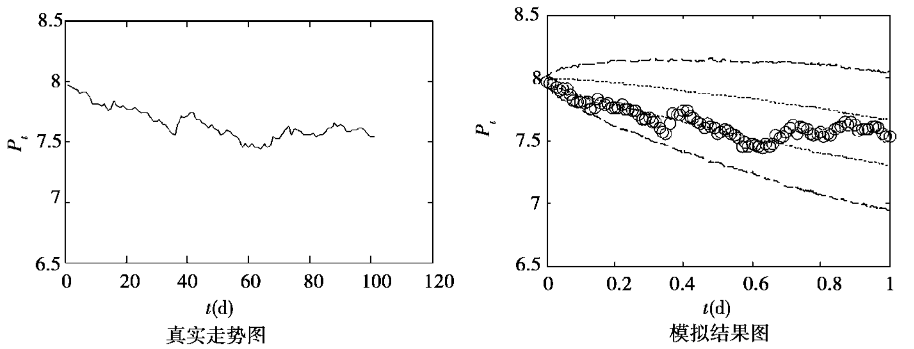
(3) 对每一个 x_i重复以上步骤就可以获得 $p^R(t_i, x_i; (t_{i-1}, x_{i-1}), \theta)$,从而就得到了极大似然函数 $L^R(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p^R(t_i, x_i; (t_{i-1}, x_{i-1}), \theta)$;

(4) 把极大似然函数变形为 $-\log L^R(\theta) = -\sum_{i=1}^{n}\log p^R(t_i, x_i; (t_{i-1}, x_{i-1}), \theta)$,求其最小值,用 matlab的命令 fmincon进行求解就得到了 θ的极大似然估计值。

为了说明以上算法的可行性和准确性,以下选取上证指数从 2008年 7月 30日到 2008年 12月 25日的收盘价作为原始数据对模型 (1)进行非参数估计。对于模型 (1)的第一个方程采用如下形式:

$$\mathrm{d}P_t = a(b - P_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{P_t}\,\mathrm{d}W_t \tag{5}$$

对于参数集 $\theta = (a, b, \sigma)$,取初值为 $(a, b, \sigma) = (3, 0.4, 0.1)$,当置信水平为 95%时的最优估计值为 $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}) = (0.067\,56, 0.5, 0.103\,1)$,每个参数的置信区间分别为 $[0.067\,55, 0.067\,56]$, $[0.499\,9, 0.500\,1]$和 $[0.092\,4, 0.113\,8]$。并且可以求出 P_t在 $t = T = 1$处的许多统计指标,例如 $E[P_T] = 7.482$, $D[P_T] = 0.079\,9$, P_T的偏度、峰度、高阶矩等。下面给出模拟的轨迹图 (图 1)。



真实走势图　　模拟结果图

图 1　真实走势与模拟结果对比图

从图 1可以看出用非参数估计方法模拟出的走势图与真实走势图非常吻合,并且置信水平很高,从而可以很好的进行预测。以下给出在参数 $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}) = (0.067\,56, 0.5, 0.103\,1)$的情况下,初值为 7.53, P_t在未来一段时间内的走势图,如图 2。

从图 2可以看出上证指数在未来一段时间内将上下小幅徘徊,经过很长一段时间之后才会有较大的攀升。

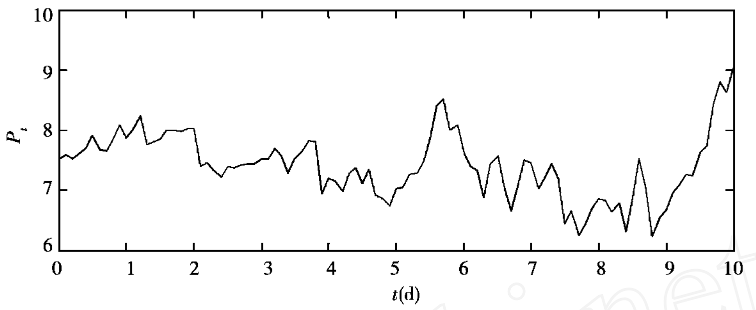


图 2 上证指数的未来走势图

4 结 论

采用非参数估计的方法进行股票指数模型估计,给出了相应的非参数估计表达式,但考虑到在实际应用时并不是很容易,给出了在实际估计时的操作步骤. 其主要思想就是用非参数的核密度函数去近似估计带参数的极大似然函数,使得实际操作易于实现. 以上证指数为例进行实证分析,实证表明该算法切实可行,并且模拟结果非常理想,最后对上证指数在未来的一段时间内的走势进行了预测和分析。

参考文献:

[1] NICOLAU J. Bias reduction in nonparametric diffusion coefficient estimation [J]. Econometric Theory, 2003 (19): 754-777

[2] HONG Y, LI H. Nonparametric specification testing for continuous-time models with applications to term structure of interest rates [J]. Review of Financial Studies, 2005 (18): 37-84

[3] BANDI F M, PHILLIPS P C B. Fully nonparametric estimation of scalar diffusion models [J]. Econometrica, 2003 (71): 241-283

[4] GLOTER A. Parameter estimation for a discrete sampling of an integrated Ornstein-Uhlenbeck process [J]. Statistics, 2001 (35): 225-243

[5] GLOTER A. Parameter estimation for a discretely observed integrated diffusion process [J]. Scandinavian Journal of Statistics, 2006 (33): 83-104

[6] NICOLAU J. Non-parametric estimation of second order stochastic differential equations [J]. Econometric Theory, 2007 (23): 880-898

[7] NICOLAU J. Modeling financial time series through second-order stochastic differential equations [J]. Statistics and Probability Letters, 2008 (78): 2700-2704

[8] DITLEVSEN S, RENSEN M S. Inference for observations of integrated diffusion processes [J]. Scandinavian Journal of Statistics, 2004 (31): 417- 429

[9] RENÒ R. Nonparametric estimation of the diffusion coefficient of stochastic volatility models [J]. Econometric Theory, 2008 (10): 51-63

[10] RENÒ R, ROMA A, SCHAEFER S. A comparison of alternative nonparametric estimators of the diffusion coefficient [J]. Economic Notes, 2006, 35(3): 227-252

[11] ZHAO Z H B. Parametric and nonparametric models and methods in financial econometrics [J]. Statistics Surveys, 2008(2): 1-42

[12] AÏT-SAHALIA Y. Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: A closed-form approximation approach [J]. Econometrica, 2002(70): 223-262

[13] BROTO C, RUIZ E. Estimation methods for stochastic volatility models: a survey [J]. J. Econ. Surveys, 2004(18): 613-649

[14] JIANG G J, KNIGHT J L. A Nonparametric approach to the estimation of diffusion processes with an application to a Short-Term Interest Rate Model [J]. Econometric Theory, 1997(13): 615-645

[15] STANTON, RICHARD. A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk [J]. Journal of Finance, 1997(52): 1973-2002

Nonparametric estimation of stochastic differential equations and its empirical study on stock index

ZHANG De-fei[1], DUAN Xing-de[2]

(1. Department of Mathematics, Honghe University, Yunnan Mengzi 661100;

2. Chuxiong Teachers University, Yunnan Chuxiong 675000, China)

Abstract: In this paper, we have proposed the stochastic differential equation model on stock index and gave the nonparametric estimators of the infinitesimal coefficients associated with the stochastic differential equation. Then, the nonparametric estimation algorithm and empirical study on Shanghai stock exchange index were given. It has shown that the model could describe many statistical characteristics of stock index; the algorithm was feasible and could better forecast the tendency about the stock index.

Key words: stochastic differential equation; nonparametric estimation; stock index

责任编辑:李翠薇