文章编号: 1672 - 058X(2009)05 - 0420 - 04

非扩张映射不动点的粘性逼近方法

唐 艳,闻道君

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:在一致 Gâteaux可微范数的 Banach空间中,研究了一个修正的逼近非扩张映射不动点的粘性迭代格式,并在适当条件下证明了粘性迭代逼近方法的强收敛性.

关键词:非扩张映射;不动点;粘性逼近;强收敛

中图分类号:O177.91 **文献标志码**:A

设 E为一实 Banach空间,D为 E的一个非空闭凸子集,称映射 $T: D\to D$为非扩张映射,如果 $\| Tx - Ty \| \leq \| x - y \|, \forall x, y\in D$;以 $F(T)$表示 T的不动点集合. 称映射 $f: D\to D$为压缩映射:如果存在一实数 $\rho\in (0, 1)$, s t $\| f(x) - f(y) \| \leq \rho \| x - y \|, \forall x, y\in D$.

Banach空间中,关于非扩张映射不动点的逼近问题已经被许多作者深入研究,并获得了一系列很好的结果[1-5]. 2007年,Chang[6]等引入了逼近非扩张映射不动点的两步迭代格式,并在适当条件下证明了迭代序列的强收敛性定理. 在此基础上,定义一个修正的逼近非扩张映射不动点的粘性迭代格式:

$$\begin{cases} x_0 = x \in D \\ y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) Tx_n, \quad \forall\ n \geq 0 \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) Ty_n \end{cases} \tag{1}$$

当 $f(x_n) = y$时,式(1)便退化为文献[6]中定义的两步迭代格式.

1 预备知识

设 E为一实 Banach空间,E^*为 E的对偶空间,以 $\langle \cdot,\cdot \rangle$表示广义对偶对,称 $J: E\to 2^{E^*}$为正规对偶映像,如果:

$$J(x) = \{ f\in E^*, \langle x, f\rangle = \| x \| \cdot \| f \|, \| x \| = \| f \| \}, \forall x \in E \tag{2}$$

设 $U = \{ x\in E: \| x \| = 1\}$为 E的单位球面,对任意 $x, y \in U$,如果极限 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\| x + ty \| - \| x \|}{t}$一致存在,则称 E的范数一致 Gâteaux可微.

设 D为 Banach空间 E的一个非空闭凸子集,$T, f: D\to D$分别为非扩张映射和压缩映射. 定义:

$$S_t(z) = (1 - t) f(z) + tTz, \forall z \in D \tag{3}$$

则对任意 $t\in (0, 1)$,不难验证 $S_t: D\to D$是压缩映像(有唯一不动点).

收稿日期: 2009 - 04 - 28;**修回日期**: 2009 - 05 - 20.

作者简介:唐艳(1979 -),女,四川泸州人,讲师,从事非线性泛函分析研究.

引理 1[1]　设 E为具有一致 Gâteaux可微范数的实 Banach空间,则由式(2)定义的正规对偶映像 $J: E\to 2^{E^*}$是单值的,并且在 E的任意有界子集上由 E的范数拓扑到 E^*的弱 *拓扑是一致连续的.

引理 2[3]　设 E为一实 Banach空间,E^*是 E的对偶空间,$J: E\to 2^{E^*}$是正规对偶映像,则对任意 $x, y\in E$,有:

(a) $\|x+y\|^2\le\|x\|^2+2\langle y, j(x+y)\rangle, \forall j(x+y)\in J(x+y)$;

(b) $\|x+y\|^2\ge\|x\|^2+2\langle y, j(x)\rangle, \forall j(x)\in J(x)$.

引理 3[4]　设$\{a_n\}\{b_n\}\{c_n\}$是 3个非负实数列,对任意 $\lambda_n\in[0,1]$,如果存在正整数 n_0,使得:

$$a_{n+1}\le(1-\lambda_n)a_n+b_n+c_n, \forall n\ge n_0$$

其中,$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\infty, b_n=o(\lambda_n), \sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$,则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

2　主要结果

定理 1　设 E为具有一致 Gâteaux可微范数的实 Banach空间,D为 E的一个非空闭凸子集,$T: D\to D$为非扩张映射且 $F(T)\neq\varnothing$, $f: D\to D$是具有系数 $\rho\in(0,1)$的压缩映射. 设$\{x_n\}\{y_n\}$是由式(1)定义的迭代序列,S_t是由式(3)定义的压缩映像且唯一不动点为 z_t,如果 $\alpha_n, \beta_n, t\in(0,1)$,并满足下列条件:

(i) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0, \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$;

(iii) $\lim_{t\to 1^-}\|z_t-p\|=0$,其中 $p\in F(T)$.

则迭代序列$\{x_n\}$有界,并且$\{x_n\}$强收敛于 F的不动点 p

证明　设 $p\in F(T)$,由式(1)及 T的非扩张性得:

$$\begin{aligned}\|y_n-p\|&=\|\beta_n(x_n-p)+(1-\beta_n)(Tx_n-p)\|\le\\&\beta_n\|x_n-p\|+(1-\beta_n)\|Tx_n-p\|\le\|x_n-p\|\end{aligned}\tag{4}$$

对任意 $n\ge 0$,由式(1)和(4)得:

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|&=\|\alpha_n(f(x_n)-p)+(1-\alpha_n)(Ty_n-p)\|\le\\&\alpha_n\|f(x_n)-p\|+(1-\alpha_n)\|Ty_n-p\|\le\\&\alpha_n\|f(x_n)-f(p)\|+\alpha_n\|f(p)-p\|+(1-\alpha_n)\|y_n-p\|\le\\&\rho\alpha_n\|x_n-p\|+\alpha_n\|f(p)-p\|+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|=\\&[1-(1-\rho)\alpha_n]\|x_n-p\|+\alpha_n\|f(p)-p\|\end{aligned}$$

记 $M=\max\left\{\|x_0-p\|, \frac{\|f(p)-p\|}{1-\rho}\right\}$,由数学归纳法得 $\|x_n-p\|\le M$. 又因为:

$$\|Tx_n-p\|\le\|x_n-p\|, \|Ty_n-p\|\le\|y_n-p\|\le\|x_n-p\|, n\ge 0\tag{6}$$

所以$\{x_n\}\{y_n\}\{Tx_n\}\{Ty_n\}$均为有界序列.

另一方面,由式(1)(4)和引理 2(a),有:

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|^2&=\|(1-\alpha_n)(Ty_n-p)+\alpha_n(f(x_n)-p)\|^2\le\\&(1-\alpha_n)^2\|y_n-p\|^2+2\alpha_n\langle f(x_n)-p, J(x_{n+1}-p)\rangle\le\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-p\|^2+2\alpha_n\langle f(x_n)-f(p), J(x_{n+1}-p)\rangle+2\alpha_n\langle f(p)-p, J(x_{n+1}-p)\rangle\le\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-p\|^2+2\alpha_n\|f(x_n)-f(p)\|\cdot\|x_{n+1}-p\|+2\alpha_n\langle f(p)-p, J(x_{n+1}-p)\rangle\le\end{aligned}$$

$$(1-\alpha_n)^2\|x_n-p\|^2+\rho\alpha_n(\|x_n-p\|^2+\|x_{n+1}-p\|^2)+2\alpha_n\langle f(p)-p,J(x_{n+1}-p)\rangle$$

记 $M_1=\sup\limits_{n\geq 0}\|x_n-p\|^2$,并整理上式得:

$$\|x_{n+1}-p\|^2\leq\frac{(1-\alpha_n)^2+\rho\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}\|x_n-p\|^2+\frac{2\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}\langle f(p)-p,J(x_{n+1}-p)\rangle\leq$$

$$\left[1-\frac{2(1-\rho)\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}\right]\|x_n-p\|^2+\frac{2\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}\langle f(p)-p,J(x_{n+1}-p)\rangle+\frac{\alpha_n^2}{1-\rho\alpha_n}M_1 \tag{7}$$

如果 z_t 为 $S_t(z)$的唯一不动点,则由式(3)得:

$$x_n-z_t=(1-t)(x_n-f(z_t))+t(x_n-Tz_t),\ \forall\ n\geq 0,\ t\in(0,1) \tag{8}$$

由式(8)和引理2(b)得:

$$t^2\|x_n-Tz_t\|^2=\|(x_n-z_t)-(1-t)(x_n-f(z_t))\|^2\geq$$
$$\|x_n-z_t\|^2-2(1-t)\langle x_n-f(z_t),J(x_n-z_t)\rangle=$$
$$\|x_n-z_t\|^2-2(1-t)\langle x_n-z_t+z_t-f(z_t),J(x_n-z_t)\rangle=$$
$$[1-2(1-t)]\|x_n-z_t\|^2+2(1-t)\langle f(z_t)-z_t,J(x_n-z_t)\rangle \tag{9}$$

由 T的非扩张性,并整理式(9)得:

$$\langle f(z_t)-z_t,J(x_n-z_t)\rangle\leq\frac{1-2t}{2(1-t)}\|x_n-z_t\|^2+\frac{t^2}{2(1-t)}\|Tz_t-x_n\|^2=$$
$$\frac{2t-1}{2(1-t)}\{\|Tz_t-x_n\|^2-\|x_n-z_t\|^2\}+\frac{1-t}{2}\|Tz_t-x_n\|^2\leq$$
$$\frac{2t-1}{2(1-t)}\{(\|Tz_t-Tx_n\|+\|Tx_n-x_n\|)^2-\|x_n-z_t\|^2\}+\frac{1-t}{2}\|Tz_t-x_n\|^2\leq$$
$$\frac{2t-1}{2(1-t)}\{2\|z_t-x_n\|\cdot\|Tx_n-x_n\|+\|Tx_n-x_n\|^2\}+\frac{1-t}{2}\|Tz_t-x_n\|^2$$

由于$\{x_n\}$有界,由(iii)得$\{z_t\}$强收敛于 $p\in F(T)$,即$\{z_t\}$有界,又因为:

$$\|Tz_t-x_n\|\leq\|Tz_t-p\|+\|x_n-p\|\leq\|z_t-p\|+\|x_n-p\| \tag{10}$$

所以$\{\|Tz_t-x_n\|\}$有界. 记 $K_1=\sup\limits_{t\in(0,1)}\{\|Tz_t-x_n\|,\|z_t-x_n\|,\|x_n-p\|\}<\infty$,则:

$$\langle f(z_t)-z_t,J(x_n-z_t)\rangle\leq\frac{2t-1}{2(1-t)}\{2K_1\|Tx_n-x_n\|+\|Tx_n-x_n\|^2\}+\frac{1-t}{2}K_1^2 \tag{11}$$

由(ii)和式(11)得:

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(z_t)-z_t,J(x_n-z_t)\rangle\leq\frac{1-t}{2}K_1^2,\quad t\in(0,1) \tag{12}$$

即对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使:

$$\langle f(z_t)-z_t,J(x_n-z_t)\rangle\leq\frac{1-t}{2}K_1^2+\varepsilon,\quad\forall n\geq N,\ t\in(0,1) \tag{13}$$

又因为序列$\{z_t\}$强收敛于 p, 由引理1得:

$$\limsup_{t\to 1^-}\langle f(z_t)-z_t,J(x_n-z_t)\rangle=\langle f(p)-p,J(x_n-p)\rangle\leq\varepsilon,\quad\forall\ n\geq N_1 \tag{14}$$

由式(14)及 ε的任意性,得:

$$\limsup_{t\to 1^-}\langle f(p)-p,J(x_n-p)\rangle\leq 0 \tag{15}$$

令 $\gamma_n=\max\{\langle f(p)-p,J(x_n-p)\rangle,0\}\geq 0$, 由式(15)可知 $0\leq\gamma_n\leq\varepsilon$, 即:

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=0 \tag{16}$$

由式(7)和式(16)得:

$$\|x_{n+1}-p\|^2\le\left[1-\frac{2(1-\rho)\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}\right]\|x_n-p\|^2+\frac{2\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}\langle f(p)-p,J(x_{n+1}-p)\rangle+\frac{\alpha_n^2}{1-\rho\alpha_n}M_1\le$$
$$\left[1-\frac{2(1-\rho)\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}\right]\|x_n-p\|^2+\frac{\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}(2\gamma_n+\alpha_nM_1)\tag{17}$$

在式(17)中取 $\lambda_n=\frac{2(1-\rho)\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}\in(0,1)$, $b_n=\frac{\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}(2\gamma_n+\alpha_nM_1)$, $c_n=0$, 由(i)和引理 3得:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|=0\tag{18}$$

即序列$\{x_n\}$强收敛于不动点 $p\in F(T)$.

参考文献:

[1] REICH S. On the asymptotic behavior of nonlinear semigroups and the range of accretive operators[J]. J Math Anal Appl, 1981, 79: 113-126

[2] WITTMANN W. Approximation of fixed points of nonexpansive mappings[J]. Arch Math, 1992, 58: 486-491

[3] CHANG S S. On Chidume's open questions and approximation solutions of multivalued strongly accretive mappings equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, 216: 94-111

[4] LIU L S. Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach space[J]. J Math Anal Appl, 1995, 194: 114-125.

[5] DENG L. Ishikawa iteration for nonexpansive mapping in uniformly convex Banach space[J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 1999, 24(2): 142-144

[6] CHANG S S, JOSEPH LEE H W, CHAN C K. On Reich's strong convergence theorem for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66: 2364-2374

[7] 闻道君. 变分不等式和非扩张映射的迭代算法[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版, 2008, 25(5): 461-463

[8] S Y SH. New strong convergence theorems for nonexpansive nonself-mappings without boundary conditions[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56: 1473-1478

Viscosity approximation of fixed point for nonexpansive mappings

TANG Yan, WEN Dao-jun

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In this paper, a modified viscosity approximation scheme is proposed for approximating the fixed point of nonexpansive mappings in a real Banach space with a uniformly Gâteaux differentiable norm, whose strong convergence is proved under some suitable conditions

Key words: nonexpansive mappings; fixed point; viscosity approximation method; strong convergence

责任编辑:李翠薇