

文章编号: 1672 - 058X(2009)04 - 0330 - 04

人工湿地数学模型研究

程凤林

(衡水学院 数学与计算机科学系, 河北 衡水 053000)

摘要:对建立的人工湿地数学模型在两种情况下进行了计算和讨论. 在一级反应情况下 $c_i \ll k_m$, 米氏方程可以简化为 $r(c_i) = -\frac{k_{\max}}{k_m} c_i$, 使用拉普拉斯变换对模型进行了求解及分析; 在零级反应情况下 $c_i \ll k_m$, 米氏方程可以简化为 $r(c_i) = -k_{\max}$, 使用分离变量法对模型进行计算; 从而得到不同情况下, 给出初值及边值污染物的相对浓度, 为提高人工湿地污水处理提供了有力的理论依据.

关键词:人工湿地; 拉普拉斯变化; 分离变量法

中图分类号: X703; O175. 23

文献标志码: A

人工湿地污水处理系统源于对自然湿地的模拟, 它利用自然生态系统中物理、化学和生物的重叠协同作用来实现对污水的净化作用. 这种湿地系统是在一定长度比及地面坡度的洼地中, 由土壤和按一定坡度填充一定级配填料 (如砾石等) 的混合结构的填料床组成, 并在床体的表面种植. 具有处理性能好、成活率高、抗水性强、生长期长、美观且具有经济价值的植物, 它与在水中、填料中生存的动物、微生物形成一个独特的动植物生态环境. 污水流经床体表面和床体填料缝隙, 通过过滤、吸附、离子交换、植物吸收及微生物分解等实现对污水的高效净化处理^[1-4].

对于人工湿地污水处理数学模型的研究, 主要建立的是潜流人工湿地污水处理数学模型. 根据文献 [5] 可将人工湿地反应器问题表述为偏微分方程:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{r}{k} c \quad (1)$$

1 一级反应情况下对模型的求解

米氏方程: $r(c_i) = -\frac{k_{\max}(c_i)}{k_m + c_i}$, $k_{\max}(c_i)$ 为最大降解速度; k_m 为米氏系数; c_i 为组分 i 的浓度.

当 $c_i \ll k_m$, 则 $c_i + k_m \approx k_m$, 米氏方程可以简化为: $r(c_i) = -\frac{k_{\max}}{k_m} c_i$, 即反应速度与污染物浓度成正比, 为一级反应. 此时, 由于微生物未被污染物所饱和, 故增加污染物浓度可以提高反应降解速度. 但是随着污染物浓度的增加, 降解速度不再按正比关系上升, 而是呈混合级反应, 即反应级数介于 0 到 1 之间, 是过渡段^[1-4].

在一级反应状态下, 式 (1) 为: $\frac{\partial c_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} - V \frac{\partial c_i}{\partial x} - \frac{k_{\max}}{k_m} c_i$

收稿日期: 2009 - 04 - 30; 修回日期: 2009 - 05 - 25.

作者简介: 程凤林 (1983 -), 女, 河北张家口人, 硕士研究生, 从事微分方程研究.

边界条件: $x=0, c_i = c_0$; 初值条件: $t=0, c_i = c_0$. 使用拉普拉斯变化计算得到结果为:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \exp\left(\frac{Vx}{2D} + \frac{x\sqrt{V^2 + 4D}}{2D}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x + t\sqrt{V^2 + 4D}}{2\sqrt{D}t}\right) + \frac{c_0}{2} \exp\left(\frac{Vx}{2D} - \frac{x\sqrt{V^2 + 4D}}{2D}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x - t\sqrt{V^2 + 4D}}{2\sqrt{D}t}\right) - \frac{c_0}{2} \exp\left(\frac{Vx}{D} - t\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x + Vt}{2\sqrt{D}t}\right) - \frac{c_0}{2} \exp(-t) \operatorname{erfc}\left(\frac{x - Vt}{2\sqrt{D}t}\right) + c_0 \exp(-t)$$

通过以上数学表达式可以找到任意时刻在填料床的任意位置, 污水中某组分的浓度.

图 1、图 2 分别为根据上式做出的不同时间污染物相对浓度随距离分布曲线和不同位置污染物相对浓度随时间变化曲线. 可以看出污染物相对浓度随距离的增大而减小, 污染物相对浓度也随时间的增大而减小, 这就实现了污染物的去除.

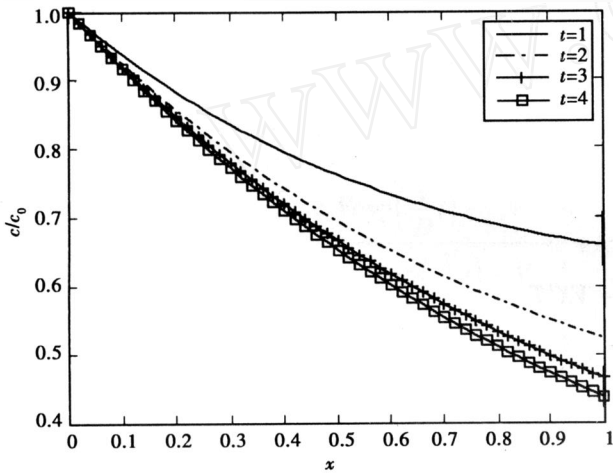


图 1 不同时间污染物相对浓度随距离分布曲线

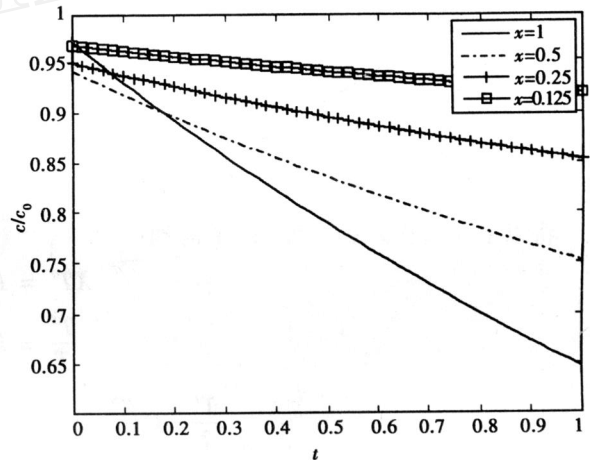


图 2 不同位置处污染物相对浓度随时间变化曲线

2 零级反应情况下对模型的求解

米氏方程中, 当 $c_i \gg k_m, c_i + k_m \approx c_i$, 米氏方程可以简为 $r(c_i) = -k_{max}$, 此时是当污染物浓度增加到一定限度, 微生物全部与污染物结合后, 微生物降解污水中有机物的反应速度达到最大值, 此时增加污染物浓度对反应速度无影响, 即遵守零级反应^[1-4]. 则式 (1) 可以写成:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} - V \frac{\partial c_i}{\partial x} - k_{max} c_i \tag{2}$$

边界条件: $x=0, c_i = c_0$; $x=l, c_i = c_e$; 初值条件: $t=0, c_i = c_0$.

为方便书写, 令: $c = c_i, D = D_i, r = k_{max}$,

则式 (3) 可以写作:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - r$$

边界条件: $c(0, t) = c_0, c(l, t) = c_e$, 初值条件: $c(x, 0) = c_0$.

使用分离变量法计算, 令: $c(x, t) = u(x, t) + \phi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V \frac{\partial u}{\partial x} + D \phi''(x) - V \phi'(x) - r$ 令

$D \phi''(x) - V \phi'(x) - r = 0, \phi(0) = c_0, \phi(l) = c_e$, 计算得到:

$$(x) = \frac{c_0 V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - c_e V - rl}{V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - V} \exp\left(\frac{V}{D}x\right) - \frac{r}{V}x + \frac{c_e V - c_0 V + rl}{V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - V}$$

因为 $c(x, t) = u(x, t) + (x)$, 则: $c(x, 0) = u(x, 0) + (x)$, 而

$$c(x, 0) = c_0, u(x, 0) = c_0 - (x) = c_0 - \frac{c_0 V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - c_e V - rl}{V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - V} \exp\left(\frac{V}{D}x\right) + \frac{r}{V}x - \frac{c_e V - c_0 V + rl}{V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - V}$$

令

$$f(x) = c_0 - \frac{c_0 V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - c_e V - rl}{V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - V} \exp\left(\frac{V}{D}x\right) + \frac{r}{V}x - \frac{c_e V - c_0 V + rl}{V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - V}$$

则 $u(x, 0) = f(x)$. 下面计算:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, u(x, 0) = f(x).$$

令: $u(x, t) = X(x)T(t)$, 则 $\frac{\partial u}{\partial t} = XT'$, $\frac{\partial u}{\partial x} = XT'$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = XT''$,

将以上 3 式代入到方程 (3) 中得到:

$$\begin{aligned} XT' &= DX''T - VX'T \\ \frac{T'}{T} &= D \frac{X''}{X} - V \frac{X'}{X} \end{aligned} \quad (4)$$

令

$$\frac{T'}{T} = D \frac{X''}{X} - V \frac{X'}{X} = -\lambda^2, DX'' - VX' + \lambda^2 X = 0$$

经过分析计算: $\lambda < \frac{V}{2D}$, $\lambda = \frac{V}{2D}$ 所得到的解都不符合此边值问题的要求. $\lambda > \frac{V}{2D}$ 时则方程 (4) 的解为:

$$X = A \exp\left(\frac{V}{2D}x\right) \sin\left[\frac{\sqrt{4D\lambda^2 - V^2}}{2D}x\right] + B \exp\left(\frac{V}{2D}x\right) \cos\left[\frac{\sqrt{4D\lambda^2 - V^2}}{2D}x\right]$$

由 $X(0) = X(l) = 0$, 可以得到:

$$B = 0, A \exp\left(\frac{Vl}{2D}\right) \sin\left[\frac{\sqrt{4D\lambda^2 - V^2}}{2D}l\right] = 0,$$

为使 $X(x)$ 不为零, 必须要求:

$$\sin\left[\frac{\sqrt{4D\lambda^2 - V^2}}{2D}l\right] = 0,$$

于是得到: $\frac{\sqrt{4D\lambda^2 - V^2}}{2D}l = n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$.

满足这个等式的 λ 的值就是本征值, 记作 $\lambda_n, \lambda_n = \frac{Dn^2}{l^2} + \frac{V^2}{4D}$.

所以: $X_n(x) = A_n \exp\left(\frac{Vx}{2D}\right) \sin\left[\frac{n}{l}x\right]$, 又对应于每一个本征值 λ_n , 方程 $\frac{T'}{T} = -\lambda_n^2$ 应变为 $\frac{T'}{T} = -\lambda_n^2$,

即:

$$T' + \lambda_n^2 T = 0$$

解得: $T_n(t) = B_n \exp\left[-\left(\frac{Dn^2}{l^2} + \frac{V^2}{4D}\right)t\right]$, $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n \exp\left[\frac{Vx}{2D} - \left(\frac{Dn^2}{l^2} + \frac{V^2}{4D}\right)t\right] \sin\left[\frac{n}{l}x\right]$,

其中: $C_n = A_n B_n$

将 $u_n(x, t)$ 进行叠加以后就可得到:

$$u(x, t) = \sum_{n=1} u_n = \sum_{n=1} C_n \cdot \exp\left[\frac{Vx}{2D} - \left(\frac{Dn^2}{l^2} + \frac{V^2}{4D}\right)t\right] \sin\frac{n}{l}x \tag{5}$$

将 $t=0$ 代入式 (5) 中可得:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1} C_n \exp\left[\frac{Vx}{2D}\right] \sin\frac{n}{l}x$$

而 $u(x, 0) = f(x)$, 所以 $f(x) \exp\left[-\frac{Vx}{2D}\right] = \sum_{n=1} C_n \sin\frac{n}{l}x$

上述表达式是函数 $f(x) \exp\left[-\frac{Vx}{2D}\right]$ 的正弦展开, 因此有:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \exp\left[-\frac{Vx}{2D}\right] \sin\frac{n}{l}x dx,$$

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1} \int_0^l f(x) \exp\left[-\frac{Vx}{2D}\right] \sin\frac{n}{l}x dx \exp\left[\frac{Vx}{2D} - \left(\frac{Dn^2}{l^2} + \frac{V^2}{4D}\right)t\right] \sin\frac{n}{l}x,$$

所以:

$$c(x, t) = u(x, t) + (x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1} \int_0^l f(x) \exp\left[-\frac{Vx}{2D}\right] \sin\frac{n}{l}x dx \exp\left[\frac{Vx}{2D} - \left(\frac{Dn^2}{l^2} + \frac{V^2}{4D}\right)t\right] \sin\frac{n}{l}x + \frac{c_0 V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - c_e V - rl}{V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - V} \exp\left(\frac{V}{D}x\right) - \frac{r}{V}x + \frac{c_e V - c_0 V + rl}{V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - V},$$

其中:

$$f(x) = c_0 - \frac{c_0 V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - c_e V - rl}{V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - V} \exp\left(\frac{V}{D}x\right) + \frac{r}{V}x - \frac{c_e V - c_0 V + rl}{V \exp\left(\frac{V}{D}l\right) - V}$$

以上在零级反应情况下对模型进行了求解, 通过求解的级数解可以得到在给定初值和边值后污染物浓度的具体数值.

3 结 论

人工湿地作为一种经济有效的污水处理技术, 已获得愈来愈多的应用. 此处在两种情况下对人工湿地污水处理数学模型进行了求解和讨论. 根据计算结果可以得到污染物在不同情况下的相对浓度, 从而为提高人工湿地污水处理系统除污效果提供有力的理论依据.

参考文献:

[1] 伊军, 崔玉波. 人工湿地污水处理技术 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2004
 [2] 刘雨, 赵庆良, 郑兴灿. 生物膜污水处理技术 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000
 [3] 宋志文, 郭本华, 韩潇源, 等. 潜流型人工湿地污水处理系统及其应用 [J]. 工业用水与废水, 2003, 34(6): 5 - 8
 [4] SUNDARAVAD MEM. Constructed wetland for wastewater treatment [J]. Critical reviews in environmental science and technology, 2001, 31(4): 351 - 409
 [5] 杨崇豪, 郑志宏. 人工湿地污水处理反应器降解有机物的数学模型 [J]. 华北水利水电学院学报, 2004, 16(2): 66 - 70

(下转 336 页)

又因为 $f_{x^2} = 2, f_{xy} = -2, f_{y^2} = 2$, 即 $A = 2, C = 2, B = -2$, 所以 $H = AC - B^2 = 0$

又因为 $B = -2 \neq 0, A = 2 > 0$, 故由定理知: $f(x, y)$ 在 $x - y + 1 = 0$ 这条直线上取得极小值.

参考文献:

- [1] 复旦大学数学系. 数学分析上册(2版)[M]. 北京:高等教育出版社, 1983
 [2] 复旦大学数学系. 数学分析下册(2版)[M]. 北京:高等教育出版社, 1983
 [3] 王建梅. 二元函数极值充分条件的评注 [J]. 工科数学, 2002, 18(6), 117 - 221
 [4] 曹恒. 二元函数极值的充分条件的一点补充 [J]. 衡阳师范学院学报:自然科学, 2004: 25(3), 15 - 16

Ponder about a dual quadratic function extreme value

YUE Chun-hong

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: This article has made the further consummation in the teaching material to the dual extreme value of function's sufficient condition under the dual quadratic function extreme value's sufficient condition, has given sufficient condition of binary quadratic function's extremum when $AC - B^2 = 0$, thus whether to take the extreme value for the dual quadratic function is possible under this situation to make the correct judgment

Key words: dual function; quadratic function; maximum value; minimum value; sufficient condition

责任编辑:李翠薇

(上接 333页)

Study of mathematical model of man-made wetland

CHENG Feng-lin

(Department of Mathematics and Computer Science, Hengshui University, Hebei Hengshui 053000, China)

Abstract: This paper makes calculation and discussion on man-made wetland mathematical model under two conditions, under first order reaction $c_i \ll k_m$, Michaelis equation can be simplified into $r(c_i) = \frac{k_{\max}}{k_m} c_i$, uses Laplace convert to solve and analyze the model, under zero order reaction $c_i \gg k_m$, Michaelis equation can be simplified into $r(c_i) = -k_{\max}$, uses separation variable to make calculation on the model, and obtains relative concentration of pollutants of initial value and border value under different conditions, providing theoretical basis for sewage treatment of man-made wetland

Key words: man-made wetland; Laplace transform; separating variables method

责任编辑:田静