文章编号: 1672 - 058X(2009) 04 - 0322 - 05

Stolz定理数列形式的一个逆命题及其推广

庹 亚 林
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 401331)

摘 要: Stolz定理是数学分析中解决$\frac{*}{0}$型和$\frac{*}{\infty}$型极限的一个重要工具. 给出了其逆命题成立的一个充要条件,并将其推广到函数形式,解决了一些问题,所得到的结论是对 Stolz定理的进一步推广.

关键词: Stolz定理;数列形式;逆命题;充要条件;函数形式
中图分类号: O174. 5 文献标志码: A

Stolz定理是数学分析中极限理论的重要内容,是解决$\frac{*}{0}$型和$\frac{*}{\infty}$型极限的一个重要工具,它使得许多常见的经典之例得到巧解和扩充[1-5]. 近年来,许多学者对 Stolz定理进行了不同方面的推广. 文献[1]给出了Stolz定理各种形式的推广,列举了一些典型的例题. 文献[2]将 Stolz定理推广到函数形式,并给出了证明. 文献[6]用另一种方法证明了函数形式的 Stolz定理,并给出了一些类似定理. 文献[7]中引用文献[2]将其推广到 Toeplitz定理,作者在此基础上将 Stolz定理和 Toeplitz定理进行了推广,得到一系列重要的结论. 文献[8]中,作者指出了 Stolz定理和 L'Hospital法则之间的联系,并给出了相互的推导. 文献[9]中,作者在差分方向上做了推广. 此处指出了 Stolz定理逆命题成立的一个充要条件,并给出了证明,同时得到$\frac{*}{0}$型的类似情况.

定理 1[10] (Stolz定理) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$,且 y_n 从某一项开始严格单调增加,如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$ (l为有限数, $+\infty$或 $-\infty$),则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = l$

Stolz定理的逆命题不一定正确,例如 $x_n = (-1)^n$, $y_n = n$ 时, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = (-1)^n - (-1)^{n-1} = \{-2, 2, -2, 2, \cdots\}$极限不存在,下面探讨在何种情况下,其逆命题成立.

定理 2 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$,且 y_n 从某一项开始严格单调增加.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n}{y_n - y_{n-1}} = A$ (A为有限数),若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = l$ (l为有限数, $+\infty$,或 $-\infty$),则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_n - x_{n-1}} = A$ (A为有限数),若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = l$ (l为有限数, $+\infty$,或 $-\infty$),则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$

证明 (1) 当 l为有限数时,由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$,当 $n > N_1$时,有$\left|\frac{x_n}{y_n} - l\right| < \varepsilon$,又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$,且 y_n 从某一项开始严格单调增加,故 $\exists N_2 > N_1$,当 $n > N_2$ 时, $y_n - y_{n-1} > 0$,所以 $|x_n - ly_n| < \varepsilon |y_n|$,

收稿日期: 2009 - 04 - 17;修回日期: 2009 - 05 - 10.
作者简介:庹亚林 (1987 -),男,重庆市酉阳人,在读本科学生,从事数学分析研究.

$|x_{n-1} - ly_{n-1}| < \varepsilon |y_{n-1}|$, 于是:

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l\right| = \left|\frac{x_n - x_{n-1} - ly_n + ly_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right| \le$$

$$\left|\frac{x_n - ly_n}{y_n - y_{n-1}}\right| + \left|\frac{x_{n-1} - ly_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right| \le \frac{\varepsilon(|y_n| + |y_{n-1}|)}{|y_n - y_{n-1}|} \le \frac{2\varepsilon |y_n|}{|y_n - y_{n-1}|} \tag{1}$$

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n}{y_n - y_{n-1}} = A$, 所以对上述 ε, $\exists N_3 > 0$, $n > N_3$ 时, 有 $\left|\frac{y_n}{y_n - y_{n-1}} - A\right| < \varepsilon$, 取 $\varepsilon = 1$, 有 $\frac{|y_n|}{|y_n - y_{n-1}|} - |A| \le \left|\frac{y_n}{y_n - y_{n-1}} - A\right| < 1$, 所以 $\frac{|y_n|}{|y_n - y_{n-1}|} < |A| + 1$. 从而 $\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l\right| < \frac{2\varepsilon|y_n|}{|y_n - y_{n-1}|} < 2\varepsilon(1 + |A|)$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$

(2) 当 l 为 $+\infty$ 时, 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = +\infty$, 故当 n 充分大时, $x_n > y_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n = +\infty$, 而 x_n 在某项后严格单增, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n} = 0$, 又有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_n - x_{n-1}} = A$. 由式 (1) 知, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$.

(3) 当 l 为 $-\infty$ 时, 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = -\infty$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{x_n}{y_n} = +\infty$, 又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_n - x_{n-1}} = A$. 由式 (2) 知 $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = -\infty$.

注: ①定理 2中条件 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n}{y_n - y_{n-1}} = A$ 及 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_n - x_{n-1}} = A$ 可以改写成 $\left\{\frac{y_n}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ 有上界 $(n\to+\infty)$ 和 $\left\{\frac{x_n}{x_n - x_{n-1}}\right\}$ 有上界 $(n\to+\infty)$. 作进一步思考此条件是否还可减弱;

②定理 2是一个充要条件, 其必要性由 Stolz定理立即可得;

③条件 $\left\{\frac{y_n}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ 有上界 $(n\to+\infty)$ 限制了一些数列无法满足定理 2

例 1 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k - (n-1)^k}{e^n - e^{n-1}}$ (其中 k 为常数).

解 令 $y_n = e^n$, $x_n = n^k$, 则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{e^n - e^{n-1}} = \frac{1}{1 - e^{-1}}$, 又由 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n = +\infty$, 且 y_n 严格单调增加, 而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{e^n}$ 收敛 (由达朗贝尔判别法), 由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{e^n} = 0$. 由定理 2知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k - n^{k-1}}{e^n - e^{k-1}} = 0$.

例 2 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{e^n} = +\infty$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n! - (n-1)!}{e^n - e^{n-1}}$.

解 令 $y_n = n!$, $x_n = e^n$, 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n = +\infty$, 且 y_n 严格单调增加, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^n}{x^n - x^{n-1}} = \frac{1}{1 - e^{-1}}$, 由定理 2知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n! - (n-1)!}{e^n - e^{n-1}} = +\infty$.

例 3 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n!)^k}{n^n} = 0$ 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n!)^k - ((n-1)!)^k}{n^n - (n-1)^{n-1}}$ (其中 k 为常数).

解 令 $y_n = n^n$, $x_n = (n!)^k$, 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n = +\infty$, 且 y_n 严格单调增加, 于是:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n^n - (n-1)^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}{n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{(-n)\left(\frac{1-n}{n}\right)}}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{e^{-1}}{n}}=1$$

由定理 2知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n!)^k-((n-1)!)^k}{n^n-(n-1)^{n-1}}=0$.

以上给出了定理 2的几个具体例子,事实上该定理还可以推广成如下形式:

推论 1　$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=+\infty$,且 y_n 从某一项开始严格单调增加,

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n}{y_n-y_{n-k}}=A$ (A为有限数),若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$ (l为有限数),则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-k}}{y_n-y_{n-k}}=l$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_n-x_{n-k}}=A$ (A为有限数),若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\pm\infty$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-k}}{y_n-y_{n-k}}=\pm\infty$.

对于$\frac{0}{0}$型的 Stolz定理亦有相应的结论如下:

定理 3　数列 y_n 严格单减, x_n, y_n 是 $n\to+\infty$的无穷小量,若$\left\{\frac{y_n}{y_n-y_{n-1}}\right\}$有上界 $(n\to+\infty)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$ (l为有限数),则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$;若$\left\{\frac{x_n}{x_n-x_{n-1}}\right\}$有上界 $(n\to+\infty)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\pm\infty$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\pm\infty$.

下面分别将定理 2和定理 3推广到函数形式.

定理 4　函数 $f(x)$和 $g(x)$, T为任意常数,且 $T>0$, $\forall x\geq a$, 有 $g(x+T)>g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$,则:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{g(x)-g(x+T)}=A$ (A为有限数),若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ (l为有限数),则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=l$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x)-f(x+T)}=A$ (A为有限数),若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=\pm\infty$.

证明　(1)当 l为有限数时,要证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=l$,只须证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(x+nT)-f(x+(n+1)T)}{g(x+nT)-g(x+(n+1)T)}=l$

即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$,当 $n>N$ 时,对于 $\forall x\in[a,a+nT]$,有$\left|\frac{f(x+nT)-f(x+(n+1)T)}{g(x+nT)-g(x+(n+1)T)}-l\right|<\varepsilon$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1>0$,当 $n>N_1$时,对于 $x\in[a,a+nT]$,有$\left|\frac{f(x+(n+1)T)}{g(x+(n+1)T)}-l\right|<\varepsilon$.所以, $|f(x+(n+1)T)-lg(x+(n+1)T)|<\varepsilon|g(x+(n+1)T)|$, $|f(x+nT)-lg(x+nT)|<\varepsilon|g(x+nT)|$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{g(x)-g(x+T)}=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists N_2>0$,当 $n>N_2$时,对于 $x\in[a,a+nT]$,有:

$$\left|\frac{g(x+nT)}{g(x+nT)-g(x+(n+1)T)}-A\right|<\varepsilon \tag{2}$$

则

$$\left|\frac{f(x+(n+1)T)-f(x+nT)}{g(x+(n+1)T)-g(x+nT)}-l\right|\leq$$

$$\left|\frac{f(x+(n+1)T)-f(x+nT)-lg(x+(n+1)T)+lg(x+nT)}{g(x+(n+1)T)-g(x+nT)}\right|\leq$$

$$\frac{|f(x+(n+1)T)-lg(x+(n+1)T)|+|f(x+nT)-lg(x+nT)|}{|g(x+(n+1)T)-g(x+nT)|}\leq$$

$$\frac{\varepsilon(|g(x+(n+1)T)|+|g(x+nT)|)}{|g(x+(n+1)T)-g(x+nT)|}\leq\varepsilon+\frac{2\varepsilon|g(x+nT)|}{|g(x+(n+1)T)-g(x+nT)|}$$

由式(2), $\left|\frac{g(x+nT)}{g(x+(n+1)T)-g(x+nT)}+A\right|\leq\varepsilon$,故$\left|\frac{g(x+nT)}{g(x+(n+1)T)-g(x+nT)}\right|<1+|A|$,

$\left|\frac{f(x+(n+1)T)-f(x+nT)}{g(x+(n+1)T)-g(x+nT)}-l\right|\leq(2|A|+3)\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=l$

(2) 当 l为 $+\infty$时,因为 $\forall x\geq a$,有 $g(x+T)>g(x)$. 所以 $g(x+T)-g(x)>0$,又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$,易知当 x充分大时, $f(x+T)-f(x)>0$且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$,又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x)-f(x+T)}=A$及式 (1),知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)-g(x+T)}{f(x)-f(x+T)}=0$,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=+\infty$.

(3) 当 l为 $-\infty$时,因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$,又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x)-f(x+T)}=A$及式 (2)知, $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=+\infty$,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=-\infty$.

注: ①定理 4中条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{g(x)-g(x+T)}=A$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x)-f(x+T)}=A$ 可以分别改写成 $\frac{g(x)}{g(x)-g(x+T)}$和$\frac{f(x)}{f(x)-f(x+T)}$有上界 $(n\to+\infty)$. 还在思考此条件是否还能减弱;

②定理 4是一个充要条件,其必要性由 Stolz定理立即可得;

③条件$\frac{g(x)}{g(x)-g(x+T)}$和$\frac{f(x)}{f(x)-f(x+T)}$有上界 $(x\to+\infty)$限制了一些函数无法满足定理 4.

例 4 (1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=l$(有限数),求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{e^x-e^{x+T}}$(其中 T为正常数).

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=+\infty$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{e^x-e^{x+T}}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-e^T}=\frac{1}{1-e^T}$, e^x在 $[a,+\infty)$上严格单增,由定理 4知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{e^x-e^{x+T}}=l$

(2) 满足定理 4的条件,故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{e^x-e^{x+T}}=l$

注:由于对函数 $f(x)$本身的性质并不了解,就不能用洛必达法则.

定理 5 函数 $f(x)$和 $g(x)$, T为任意正常数, $\forall x\geq a$, 有 $g(x+T)<g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,则:

(1) $\frac{g(x)}{g(x)-g(x+T)}$有上界 $(x\to+\infty)$,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$($l$为有限数),则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=l$;

(2) $\frac{f(x)}{f(x)-f(x+T)}$有上界 $(x\to+\infty)$,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x+T)}{g(x)-g(x+T)}=\pm\infty$.

参考文献:

[1] 孙本旺,汪浩. 数学分析中的典型例题和解题方法 [M]. 长沙:湖南科技出版社, 1985

[2] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 北京:高等教育出版社, 2006

[3] 袁文俊,阴晓玲. L'Hospital法则和 Stolz定理的推广与应用 [J]. 广州大学学报, 2001, 15 (2): 18-21

[4] 菲赫金哥尔茨 P M. 微积分等教程 [M]. 叶彦廉等,译. 北京:人民教育出版社, 1978

[5] 张丽娅. Stolz定理的巧用 [J]. 天水师范学院学报. 2008, 28 (2): 4-5

[6] 李俊杰. Stolz定理的推广 [J]. 燕山大学学报, 1982 (1): 100-109

[7] 匡继昌. 关于 Stolz定理的若干推广 [J]. 湖南师院学报. 1984 (8): 105 - 112

[8] 刘利刚. 从 Stolz定理到 L'Hospital法则 [J]. 数学的实践与认识, 2008, 38 (5): 163-167

[9] 杨姗姗,刘健,马跃超. Stolz定理推广定理的推广 [J]. 数学的实践与认识, 2003, 33 (6): 117-120

[10] 刘三阳,于力,李广民. 数学分析选讲 [M]. 北京:科学出版社, 2007

A converse proposition of the sequence form of Stolz theorem and its generalizations

TUO Ya-lin

(College of Mathematics and Computer Science,
Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Stolz theorem is an important tool in the mathematical analysis to solve the limit of $\frac{*}{0}$ and $\frac{*}{\infty}$ type. Many scholars use different methods to prove the Stolz theorem, and from different directions to generalize a series of important research results. In this paper, we set up a necessary and sufficient condition of the inverse proposition of the Stolz theorem, generalize it to the function form, and solve some problems. The conclusions of this paper is the further generalization of the Stolz theorem.

Key words: Stolz theorem; sequence form; converse proposition; necessary and sufficient conditions; function form

责任编辑:李翠薇

(上接321页)

参考文献:

[1] 汤光宋. 幂指函数导数与积分的简捷求法及应用[J]. 德州学院学报, 2001, 17(4): 4-7

[2] 周光明. 幂指函数的求导公式[J]. 数学理论与应用, 1999, 19(4): 39-40

[3] 陈传璋. 数学分析[M]. 北京:高等教育出版社, 1985

The derivative of special power exponential function

ZHANG Ping

(Department of Humanities, Sichuan Professional College of Finance and Economics, Chengdu 610101, China)

Abstract: This paper sets out from the method of gaining derivatives by logarithm, gives the concept and a series of derivative formulas, which includes n times function power and n times compound of power exponential function. It is beneficial to unary function theory and teaching.

Key words: power exponential function; power; compound; derivative

责任编辑:李翠薇