文章编号: 1672 - 058X(2009)04 - 0319 - 03

特殊幂指函数的导数

张 萍
(四川财经职业学院 人文科学系,成都 610101)

摘 要:从对数求导法则出发,给出了 n个函数乘幂的幂指函数及 n次复合的幂指函数的概念和一系列求导公式,充实了一元函数微分学的理论与教学.

关键词:幂指函数;乘幂;复合;导数
中图分类号: O211. 1 **文献标志码**: A

定理 1[1] 幂指函数 $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$的导数公式 ($f(x) > 0$; f,φ均为可微函数): $y' = [f(x)]^{\varphi(x)}[\varphi(x)\ln f(x)]'$,将利用它推出一些特殊幂指函数的导数公式.

1 n个函数乘幂的幂指函数概念和求导公式

1.1 n个指数函数乘幂的幂指函数

为简便,作符号约定: $y_{[n]} = (a^x)^{(a^x)^{N}(a^x)}$共 n个指数函数乘幂. 令 $y_{[0]} = 1$, $y_{[n]}! = y_{[n]}y_{[n-1]}\cdots y_{[2]}y_{[1]}$, $y_{[m]} = 0$(当 $m < 0$).

定理 2 幂指函数 $y_{[n]}$的求导公式 (其中 $n > 1$,且 $n\in N$):

$$y'_{[n]} = y_{[n]}\cdot\ln a\cdot y_{[n-1]}\left[\begin{array}{l}1 + (x\ln a)\cdot y_{[n-2]} + (x\ln a)^2\cdot y_{[n-2]}\cdot y_{[n-3]} + \cdots + (x\ln a)^j\\ \cdot y_{[n-2]}\cdots y_{[n-1-j]} + \cdots + (x\ln a)^{n-2}\cdot y_{[n-2]}! + (x\ln a)^{n-1}\cdot y_{[n-2]}!\end{array}\right] \tag{1}$$

其中 $1\le j\le n-1$, $j\in N$. 特别地,当 $n = 1$时,得到指数函数 a^x的求导公式 $y'_{[1]} = a^x\ln a$.

证明 (1) 当 $n = 2$时,即 $y_{[2]} = (a^x)^{(a^x)}$; $y'_{[2]} = (a^x)^{(a^x)}\cdot\ln a\cdot(xa^x)' = y_{[2]}\cdot\ln a\cdot y_{[1]}(1 + x\ln a)$,公式 (1)成立.

(2) 假定当 $n = k-1$时公式 (1)成立,即:

$$y_{[k-1]} = (a^x)^{(a^x)^{N}(a^x)}$$

$$y'_{[k-1]} = y_{[k-1]}\cdot\ln a\cdot y_{[k-2]}\left[\begin{array}{l}1 + (x\ln a)\cdot y_{[k-3]} + (x\ln a)^2\cdot y_{[k-3]}\cdot y_{[k-4]} + \cdots +\\ (x\ln a)^i\cdot y_{[k-3]}\cdot y_{[k-4]}\cdots y_{[k-2-i]} + \cdots +\\ (x\ln a)^{k-3}\cdot y_{[k-3]}! + (x\ln a)^{k-2}\cdot y_{[k-3]}!\end{array}\right]$$

当 $n = k$时,即有 $y_{[k]} = a^{xy_{[k-1]}}$;两边取对数得 $\ln y_{[k]} = xy_{[k-1]}\cdot\ln a$;两边再对 x求导得: $\frac{1}{y_{[k]}}y'_{[k]} = \ln a\cdot(xy_{[k-1]})'$.于是有:

$$y'_{[k]} = y_{[k]}\cdot\ln a\cdot(y_{[k-1]} + xy'_{[k-1]}) =$$

收稿日期: 2009 - 02 - 26;**修回日期**: 2009 - 03 - 20.
作者简介:张萍 (1979 -),女,陕西宝鸡人,硕士,助教,从事数学教育研究.

$$y_{[k]}\cdot\ln a\cdot y_{[k-1]}\left\{1+x\cdot\ln a\cdot y_{[k-2]}\begin{bmatrix}1+(x\ln a)y_{[k-3]}+(x\ln a)^2\cdot y_{[k-3]}y_{[k-4]}\\+\cdots+(x\ln a)^i\cdot y_{[k-3]}\cdots y_{[k-2-i]}+\cdots+\\(x\ln a)^{k-3}\cdot y_{[k-3]}!+(x\ln a)^{k-2}\cdot y_{[k-3]}!\end{bmatrix}\right\}=$$

$$y_{[k]}\cdot\ln a\cdot y_{[k-1]}\begin{bmatrix}1+(x\ln a)\cdot y_{[k-2]}+(x\ln a)^2\cdot y_{[k-2]}\cdot y_{[k-3]}+\cdots+(x\ln a)^{i+1}\\\cdot y_{[k-2]}\cdots y_{[k-2-i]}+\cdots+(x\ln a)^{k-2}\cdot y_{[k-2]}!+(x\ln a)^{k-1}\cdot y_{[k-2]}!\end{bmatrix}\overset{令\ j=i+1}{=\!=\!=}$$

$$y_{[k]}\cdot\ln a\cdot y_{[k-1]}\begin{bmatrix}1+(x\ln a)\cdot y_{[k-2]}+(x\ln a)^2\cdot y_{[k-2]}\cdot y_{[k-3]}+\cdots+(x\ln a)^{j}\\\cdot y_{[k-2]}\cdots y_{[k-1-j]}+\cdots+(x\ln a)^{k-2}\cdot y_{[k-2]}!+(x\ln a)^{k-1}\cdot y_{[k-2]}!\end{bmatrix}$$

其中 $1\le i, j\le n-1$,且 $i, j\in N$. 由数学归纳法易知公式 (1)成立.

推论 1 当 $a=e$时,则 $y_{[n]}=(e^x)^{(e^x)N(e^x)}$,

$$y'_{[n]}=y_{[n]}y_{[n-1]}\begin{bmatrix}1+x\cdot y_{[n-2]}+x^2\cdot y_{[n-2]}\cdot y_{[n-3]}+\cdots+x^j\cdot y_{[n-2]}\cdots y_{[n-1-j]}\\+\cdots+x^{n-2}\cdot y_{[n-2]}!+x^{n-1}\cdot y_{[n-2]}!\end{bmatrix}\tag{2}$$

其中 $1\le j\le n-1$, $j\in N$.

1.2 n个幂函数乘幂的幂指函数

为简便,作符号约定: $y_{(n)}=(x^a)^{(x^a)N(x^a)}$共 n个幂函数乘幂,令 $y_{(0)}=1$, $y_{(n)}!=y_{(n)}y_{(n-1)}\cdots y_{(2)}y_{(1)}$, $y_{(m)}=0$(当 $m<0$).

定理 3 幂指函数 $y_{(n)}$的求导公式 (其中 $n>1$,且 $n\in N$):

$$y'_{(n)}=a\cdot\frac{1}{x}\cdot y_{(n)}\cdot y_{(n-1)}\begin{bmatrix}1+(a\ln x)\cdot y_{(n-2)}+(a\ln x)^2\cdot y_{(n-2)}\cdot y_{(n-3)}+\cdots+(a\ln x)^j\\y_{(n-2)}\cdots y_{(n-1-j)}+\cdots+(a\ln x)^{n-2}\cdot y_{(n-2)}!+(a\ln x)^{n-1}\cdot y_{(n-2)}!\end{bmatrix}\tag{3}$$

其中 $1\le j\le n-1$, $j\in N$. 特别地,当 $n=1$时,得到幂函数 x^a的求导公式 $y'_{(1)}=ax^{a-1}$,上式的证明类似于公式 (3).

推论 2 当 $a=1$时,则 $y_{(n)}=(x)^{(x)N(x)}$,

$$y'_{(n)}=\frac{1}{x}\cdot y_{(n)}\cdot y_{(n-1)}\begin{bmatrix}1+(\ln x)\cdot y_{(n-2)}+(\ln x)^2\cdot y_{(n-2)}\cdot y_{(n-3)}+\cdots+(\ln x)^j\\\cdot y_{(n-2)}\cdots y_{(n-1-j)}+\cdots+(\ln x)^{n-2}\cdot y_{(n-2)}!+(\ln x)^{n-1}\cdot y_{(n-2)}!\end{bmatrix}\tag{4}$$

其中 $1\le j\le n-1$, $j\in N$.

1.3 特殊类型的幂指函数

为简便,作符号约定: $y_{\langle n\rangle}=(a^x)^{(x^b)(a^x)N}$, $y_{\{n\}}=(x^b)^{(a^x)(x^b)N}$, $y_{\langle 0\rangle}=y_{\{0\}}=1$, $y_{\langle m\rangle}=y_{\{m\}}=0$(当 $m<0$).

定理 4 幂指函数 $y_{\langle n\rangle}$, $y_{\{n\}}$的求导公式 (其中 $n>1$,且 $n\in N$):

$$y'_{\langle n\rangle}=\ln a\cdot y_{\langle n\rangle}(y_{\{n-1\}}+x\cdot y'_{\{n-1\}})\tag{5}$$

$$y'_{\{n\}}=b\cdot y_{\{n\}}\left(\frac{1}{x}\cdot y_{\langle n-1\rangle}+\ln x\cdot y'_{\langle n-1\rangle}\right)\tag{6}$$

利用公式 (5)和 (6)可分别得出,当 n为奇数或偶数时, $y_{\langle n\rangle}$和 $y_{\{n\}}$的最终导数公式.

推论 3 当 $a=e$, $b=1$时, $y_{\langle n\rangle}=(e^x)^{(x)(e^x)N}$, $y_{\{n\}}=(x)^{(e^x)(x)N}$;

$$y'_{\langle n\rangle}=y_{\langle n\rangle}(y_{\{n-1\}}+x\cdot y'_{\{n-1\}})\tag{7}$$

$$y'_{\{n\}}=y_{\{n\}}\left(\frac{1}{x}\cdot y_{\langle n-1\rangle}+\ln x\cdot y'_{\langle n-1\rangle}\right)\tag{8}$$

2 n次复合的幂指函数的概念和求导公式

2.1 第一类 n次复合的幂指函数

为简便,作符号约定: $(a^x)_{[n]}=(\cdots((a^x)^{a^x})\cdots)^{a^x}$, $(x^b)_{[n]}=(\cdots((x^b)^{x^b})\cdots)^{x^b}$共复合 n次.

定理 5 n次复合的幂指函数 $(a^x)_{[n]}$, $(x^a)_{[n]}$的求导公式:

$$(a^x)_{[n]}=(a^x)_{[n]}\cdot\ln a\cdot a^{(n-1)x}[1+(n-1)\cdot x\cdot\ln a]\tag{9}$$

$$(x^b)_{[n]}=(x^b)_{[n]}\cdot b\cdot\frac{1}{x}\cdot x^{(n-1)b}[1+(n-1)\cdot b\cdot\ln x]\tag{10}$$

证明

$$(a^x)_{[n]}=(\cdots((a^x)^{a^x})\cdots)^{a^x}=a^{x\cdot a^{x}\cdots a^{x}}=a^{x\cdot a^{(n-1)x}}$$

$$(x^b)_{[n]}=(\cdots((x^b)^{x^b})\cdots)^{x^b}=x^{b\cdot x^{b}\cdots x^{b}}=x^{b\cdot x^{(n-1)b}}$$

两边取对数后再对 x 求导得:

$$(a^x)'_{[n]} = a^{x\cdot a^{(n-1)x}}\cdot \ln a\cdot [x\cdot a^{(n-1)x}]' = (a^x)_{[n]}\cdot \ln a\cdot a^{(n-1)x}[1+(n-1)\cdot x\cdot \ln a]$$

$$(x^b)'_{[n]} = (x^b)_{[n]}\cdot b\cdot [\ln x\cdot x^{(n-1)b}]' = (x^b)_{[n]}\cdot b\cdot \frac{1}{x}\cdot x^{(n-1)b}[1+(n-1)\cdot b\cdot \ln x]$$

故公式 (9)和 (10)成立.

推论 4　当 $a=\mathrm{e}, b=1$ 时,则 $(\mathrm{e}^x)_{[n]} = (\cdots((\mathrm{e}^x)^{\mathrm{e}^x})\cdots)^{\mathrm{e}^x}$, $(x)_{[n]} = (\cdots((x)^x)\cdots)^x$,

$$(\mathrm{e}^x)'_{[n]} = (\mathrm{e}^x)_{[n]}\cdot \mathrm{e}^{(n-1)x}\cdot [1+(n-1)\cdot x] \tag{11}$$

$$(x)'_{[n]} = (x)_{[n]}\cdot \frac{1}{x}\cdot x^{(n-1)}[1+(n-1)\ln x] \tag{12}$$

2.2　第二类 n 次复合的幂指函数

为简便,作符号约定: $((a^x)^{x^b})_{[n]} = (\cdots((a^x)^{x^b})^{a^x}\cdots)$, $((x^b)^{a^x})_{[n]} = (\cdots((x^b)^{a^x})^{x^b}\cdots)$共复合 n次.

定理 6　n次复合的幂指函数 $((a^x)^{x^b})_{[n]}$, $((x^b)^{a^x})_{[n]}$ 的求导公式:

$$((a^x)^{x^b})'_{[n]} = \begin{cases} ((a^x)^{x^b})_{[n]}\ln a\cdot a^{\left(\frac{n}{2}-1\right)x}\cdot x^{\frac{n}{2}b}\left[1+\frac{n}{2}b+x\ln a\left(\frac{n}{2}-1\right)\right], & \text{当 } n \text{为偶数} \\ ((a^x)^{x^b})_{[n]}\ln a\cdot a^{\frac{n-1}{2}x}\cdot x^{\frac{n-1}{2}b}\left[1+\frac{n-1}{2}b+x\ln a\left(\frac{n-1}{2}\right)\right], & \text{当 } n \text{为奇数} \end{cases} \tag{13}$$

$$((x^b)^{a^x})'_{[n]} = \begin{cases} ((x^b)^{a^x})_{[n]}b\cdot a^{\frac{n}{2}x}\cdot x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)b}\left[\frac{1}{x}+\frac{n}{2}\ln(a+x)+\frac{1}{x}\left(\frac{n}{2}-1\right)b\ln x\right], & \text{当 } n \text{为偶数} \\ ((x^b)^{a^x})_{[n]}b\cdot a^{\frac{n-1}{2}x}\cdot x^{\frac{n-1}{2}b}\left[\frac{1}{x}+\frac{n-1}{2}\ln(a+x)+\frac{1}{x}\frac{n-1}{2}b\ln x\right], & \text{当 } n \text{为奇数} \end{cases} \tag{14}$$

其证明类似于公式 (9)和 (10).

推论 5　当 $a=\mathrm{e}, b=1$ 时, $((\mathrm{e}^x)^x)_{[n]} = (\cdots((\mathrm{e}^x)^x)^{\mathrm{e}^x}\cdots)$, $((x)^{\mathrm{e}^x})_{[n]} = (\cdots((x)^{\mathrm{e}^x})^x\cdots)$

$$((\mathrm{e}^x)^x)'_{[n]} = \begin{cases} ((\mathrm{e}^x)^x)_{[n]}\cdot \mathrm{e}^{\left(\frac{n}{2}-1\right)x}\cdot x^{\frac{n}{2}}\left[1+\frac{n}{2}+x\left(\frac{n}{2}-1\right)\right], & \text{当 } n \text{为偶数} \\ ((\mathrm{e}^x)^x)_{[n]}\cdot \mathrm{e}^{\frac{n}{2}x}\cdot x^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left[1+\frac{n-1}{2}+x\left(\frac{n-1}{2}\right)\right], & \text{当 } n \text{为奇数} \end{cases} \tag{15}$$

$$((x)^{\mathrm{e}^x})'_{[n]} = \begin{cases} ((x)^{\mathrm{e}^x})_{[n]}\cdot \mathrm{e}^{\frac{n}{2}x}\cdot x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left[\frac{1}{x}+\frac{n}{2}\ln x+\frac{1}{x}\left(\frac{n}{2}-1\right)\ln x\right], & \text{当 } n \text{为偶数} \\ ((x)^{\mathrm{e}^x})_{[n]}\cdot \mathrm{e}^{\frac{n-1}{2}x}\cdot x^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{1}{x}+\frac{n-1}{2}\ln x+\frac{1}{x}\frac{n-1}{2}\ln x\right], & \text{当 } n \text{为奇数} \end{cases} \tag{16}$$

3　应用举例

最后给出以上公式的一些实际应用例子。

例 1　(1) 设 $y=(e^x)^{(e^x)(e^x)}$,求 y'; (2) 设 $y=(((e^x)^x)^{e^x})^x$,求 y'.

解　(1) $y' = y_{[3]}\cdot y_{[2]}(1+x\cdot y_{[1]}+x^2\cdot y_{[1]}) = (e^x)^{(e^x)(e^x)}\cdot (e^x)^{(e^x)}(1+xe^x+x^2e^x)$;

(2) $y=(((e^x)^x)^{e^x})^x\cdot e^x\cdot x^2\cdot (3+x)$.

例 2　求下列不定积分 (1) $\int \frac{1}{x}\cdot (x^2)^{(x^2)(x^2)}\cdot (x^2)^{(x^2)}[2+4\ln x\cdot x^2+8(\ln x)^2\cdot x^2]\mathrm{d}x$; (2) $3\int ((x^3)^{x^3})^{x^3}\cdot x^5(1+6\ln x)\mathrm{d}x$

解　(1) 原式 $= 2\int \frac{1}{x}\cdot (x^2)^{(x^2)(x^2)}\cdot (x^2)^{(x^2)}[1+(2\ln x)\cdot x^2+(2\ln x)^2\cdot x^2]\mathrm{d}x =$

$$\int [(x^2)^{(x^2)(x^2)}]'\mathrm{d}x = (x^2)^{(x^2)(x^2)} + c$$

(2) 原式 $= \int ((x^3)^{x^3})^{x^3}\cdot 3\cdot \frac{1}{x}\cdot x^6(1+6\ln x)\mathrm{d}x = \int [(x^3)_{[3]}]'\mathrm{d}x = ((x^3)^{x^3})^{x^3} + c$

(下转 326页)

A converse proposition of the sequence form of Stolz theorem and its generalizations

TUO Ya-lin

(College of Mathematics and Computer Science,
Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Stolz theorem is an important tool in the mathematical analysis to solve the limit of $\frac{*}{0}$ and $\frac{*}{\infty}$ type. Many scholars use different methods to prove the Stolz theorem, and from different directions to generalize a series of important research results In this paper, we set up a necessary and sufficient condition of the inverse proposition of the Stolz theorem, generalize it to the function form, and solve some problems The conclusions of this paper is the further generalization of the Stolz theorem.

Key words: Stolz theorem; sequence form; converse proposition; necessary and sufficient conditions; function form

责任编辑:李翠薇

(上接 321页)

参考文献:

[1] 汤光宋. 幂指函数导数与积分的简捷求法及应用[J]. 德州学院学报, 2001, 17(4): 4-7
[2] 周光明. 幂指函数的求导公式[J]. 数学理论与应用, 1999, 19(4): 39-40
[3] 陈传璋. 数学分析[M]. 北京:高等教育出版社, 1985

The derivative of special power exponential function

ZHANG Ping

(Department of Humanities, Sichuan Professional College of Finance and Economics, Chengdu 610101, China)

Abstract: This paper sets out from the method of gaining derivatives by logarithm, gives the concept and a series of derivative formulas, which includes n times function power and n times compound of power exponential function. It is beneficial to unary function theory and teaching

Key words: power exponential function; power; compound; derivative

责任编辑:李翠薇