第 26卷第 4期 重庆工商大学学报 (自然科学版) 2009年 8月
Vol. 26 NO. 4 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Aug. 2009

文章编号: 1672 - 058X (2009) 04 - 0311 - 05

广义混合变分不等式解的存在性与迭代算法

姚 莉

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:研究了一类广义混合变分不等式;利用 η - 次微分和 η - 近似映象这两个概念讨论了这种广义混合变分不等式解的存在性;并结合分裂技巧和自适应迭代技巧提出了一个求解这种广义混合变分不等式的显式迭代算法;最后证明了该算法在适当的条件下收敛.

关键词:变分不等式;η-次微分; η-近似映象; 显式迭代算法

中图分类号: O177. 91 **文献标志码**: A

最近,文献[1]利用投影技巧并结合分裂技巧、自适应迭代技巧给出了一个求解一般变分不等式的改进的隐式迭代算法. 受文献[1]的启发,此处研究一类更一般的广义混合变分不等式,它包含了文献[1 - 3]所研究的一般变分不等式,并利用 η - 次微分算子的预解式技术,建立了这种广义混合变分不等式与不动点问题之间的等价关系;进而利用这种等价关系并结合分裂技巧、自适应迭代技巧提出了一个新的求解这种广义混合变分不等式的显式迭代算法.

设 H是一个实 Hilbert空间,其内积和范数分别为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$和 $\|\cdot\|$, K是一个 H中的非空闭凸集. $T, g: H\to H$, $\eta: H\times H\to H$是非线性映射, $\phi: H\to R\cup\{+\infty\}$是下半连续 η - 次可微真泛函且满足 $g(H)\cap \mathrm{dom}\,\partial_\eta\phi\neq\phi$(其中 $\partial_\eta\phi$表示 ϕ的 η - 次微分). 现在考虑广义混合变分不等式问题:求 $u\in H$, s t.

$$\langle Tu,\eta(g(v),g(u))\rangle+\phi(g(v))-\phi(g(u))\geq 0,\ \forall\ g(v)\in H \tag{1}$$

如果 $\eta(g(v),g(u))=g(v)-g(u)$, $\phi(v)=\begin{cases}0, & v\in K\\ +\infty, & \text{其他}\end{cases}$;问题 (1)就退化成文献[1]所研究的一般变分不等式问题:

$$u\in H,\ g(u)\in K,\ \text{s t}\langle Tu,g(v)-g(u)\rangle\geq 0,\quad \forall\ g(v)\in K \tag{2}$$

定义 1 $\forall\ u,v\in H$; $T, g: H\to H$; $\eta: H\times H\to H$是非线性映射,称 T是 g- η - 伪单调的,若 $\langle Tu,\eta(g(v),g(u))\rangle\geq 0$,则有 $\langle Tv,\eta(g(v),g(u))\rangle\geq 0$.

注 1 当 $\eta(g(v),g(u))=g(v)-g(u)$时,该定义就正好是文献[1]中对算子 T的 g-伪单调的定义.

定义 2[4] 设 $\eta: H\times H\to H$, $\phi: H\to R\cup\{+\infty\}$,称 ϕ在 x处是 η - 次可微的,若存在 $f\in H$使得: $\phi(y)-\phi(x)\geq\langle f,\eta(y,x)\rangle$, $\forall\ y\in H$. 并称 f为 ϕ在 x处的 η - 次剃度. 记 $\partial_\eta\phi(x)$ 为 ϕ在 x处所有 η - 次剃度全体,即 $\partial_\eta\phi(x)=\{f\in H:\phi(y)-\phi(x)\geq\langle f,\eta(y,x)\rangle,\ \forall\ y\in H\}$.

定义 3[4] 设 $\phi: H\to R\cup\{+\infty\}$. 对任意给定的 $x\in H$及 $\rho>0$,若存在 $\eta: H\times H\to H$及惟一点 $u\in H$满足:

$$\langle u-x,\eta(y,u)\rangle\geq\rho\phi(u)-\rho\phi(y),\ \forall\ y\in H \tag{3}$$

收稿日期: 2009 - 04 - 23;**修回日期**: 2009 - 05 - 21.

作者简介:姚莉 (1968 -),女,重庆人,讲师,从事非线性泛函分析研究.

那么称映象 $x\to u$为 ϕ的 η - 近似映象,记作 $u=J\partial_\eta\phi(x)$.

由定义 2和定义 3,显然有 $x-u\in\rho\partial_\eta\phi(u)$,所以 $u=J\partial_\eta\phi(x)=(I+\rho\partial_\eta\phi)^{-1}(x)$, $\forall\ x\in H$ (I为 H上的恒等映象).

引理 1[2]

$$\forall\ u,v\in H,\quad 2\langle u,v\rangle=\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2 \tag{4}$$

引理 2[4] 设 $\eta: H\times H\to H$是 δ - 强单调且 τ - Lipschitz连续映象,满足 $\eta(x,y)+\eta(y,x)=0$, $\forall\ x,y\in H$,且 $\phi: H\to R\cup\{+\infty\}$是一个下半连续 η - 次可微真泛函,又设函数 $h(y,u)=\langle x-u,\eta(y,u)\rangle$关于 y是 0 - 对角拟凸的,那么 $J\partial_\eta\phi(x)$有定义且是$\frac{T}{\delta}$ - Tipschitz连续的.

引理 3 设引理 2的条件满足,则 $u\in H$是问题 (1)的解当且仅当 $u\in H$满足:

$$g(u)=J\partial_\eta\phi[g(u)-\rho Tu] \tag{5}$$

证明 变分不等式 (1)可化为 $\phi(g(v))-\phi(g(u))\geq-\langle Tu,\eta(g(v),g(u))\rangle$;根据定义 2即 η - 次微分定义,该式等价于 $-Tu\in\partial_\eta\phi(g(u))$,即 $g(u)-\rho Tu\in(I+\rho\partial_\eta\phi)(g(u))$.

故变分不等式 (1)的解为 $g(u)=J\partial_\eta\phi[g(u)-\rho Tu]$.

引理 3表明问题 (1)和 (5)等价. 现在定义余函数:

$$R(u)=g(u)-J\partial_\eta\phi[g(u)-\rho Tu] \tag{6}$$

利用引理 3,显然 $u\in H$是问题 (1)的解当且仅当 $u\in H$满足:

$$R(u)=0 \tag{7}$$

对于一个给定的常数 $\gamma>0$,可以把式 (7)改写成:

$$g(u)=g(u)-\gamma R(u)=g(u)-\gamma\{g(u)-J\partial_\eta\phi[g(u)-\rho Tu]\} \tag{8}$$

利用不动点公式 (8),可以给出如下显式迭代算法:

算法 1 对于给定 $u_0\in H$,由以下迭代格式计算 u_{n+1}:

$$g(u_{n+1})=g(u_n)-\gamma_n\{g(u_n)-J\partial_\eta\phi[g(u_n)-\rho_n Tu_n]\};\quad n=0,1,\cdots$$

或者可以改写成:

$$g(y_n)=J\partial_\eta\phi[g(u_n)-\rho_n Tu_n],\ g(u_{n+1})=g(u_n)-\gamma_n\{g(u_n)-g(y_n)\}$$

当 $\gamma_n=1$, $\eta(g(v),g(u))=g(v)-g(u)$时,算法 1就退变成文献 [3]中的算法 3.1,即:

算法 2 对于给定 $u_0\in H$,由以下迭代格式计算 u_{n+1}:

$$g(u_{n+1})=J\partial_\eta\phi[g(u_n)-\rho_n Tu_n];\ n=0,1,2\cdots$$

该算法已经被证明需要在算子 T是 g- 强单调以及 Lipschitz连续的条件下收敛. 这一严格的收敛条件大大限制了该算法的应用. 为了加速它的收敛,削弱算法收敛的条件,采用分裂技巧,可以把式 (5)改写成:

$$g(y)=J\partial_\eta\phi[g(u)-\rho Tu] \tag{9}$$

$$g(u)=J\partial_\eta\phi[g(y)-\rho Ty] \tag{10}$$

根据这一等价公式,可以给出如下求解问题 (1)的迭代算法:

算法 3 对于给定 $u_0\in H$,由以下迭代格式计算 u_{n+1}:

$$g(y_n)=J\partial_\eta\phi[g(u_n)-\rho_n Tu_n]$$

$$g(u_{n+1})=J\partial_\eta\phi T[g(y_n)-\rho_n Ty_n];\ n=0,1,2\cdots$$

当 $\eta(g(v),g(u))=g(v)-g(u)$时,该算法被称之为两步预测 - 校正迭代算法,已经被广泛地应用,一些学者后来在此基础上又提出了三步、四步预测 - 校正迭代算法. 现在换一种角度来考虑算法 3,可以认为由式 (9)定义的 $g(y)$是问题 (1)的一个近似解,并且定义 $g(w)=J\partial_\eta\phi[g(y)-\rho Ty]$, $g(z)=J\partial_\eta\phi[g(u)-\rho Tw]$. 上述公式定义的 w, z仍然可以看着是问题 (1)的近似解,由此给出如下一个新的求解问题 (1)的迭代算法:

算法 4　对于给定 $u_0 \in H$,由以下迭代格式计算 u_{n+1}:

$$g(y_n) = J_{\partial\eta}^{\phi}[g(u_n) - \rho_n Tu_n],\ g(w_n) = J_{\partial\eta}^{\phi}[g(y_n) - \rho_n Ty_n]$$

$$g(z_n) = J_{\partial\eta}^{\phi}[g(u_n) - \rho_n Tw_n],\ g(u_{n+1}) = g(z_n) + \rho_n Tw_n - \rho_n Tz_n;\ n = 0, 1, 2\cdots$$

利用文献[1]中自适应迭代技巧,对于一个常数 $\alpha > 0$,现在考虑:

$$g(u) = g(u) - \alpha[g(u) - g(z) + \rho Tz - \rho Tw] \tag{11}$$

此处,$\alpha > 0$是沿着迭代方向 $-[g(u) - g(z) + \rho Tz - \rho Tw]$的步长. 根据这一不动点公式可以给出如下迭代算法:

算法 5　对于给定 $u_0 \in H$,由以下迭代格式计算 u_{n+1}:

$$g(y_n) = J_{\partial\eta}^{\phi}[g(u_n) - \rho_n Tu_n],\ g(w_n) = J_{\partial\eta}^{\phi}[g(y_n) - \rho_n Ty_n],\ g(z_n) = J_{\partial\eta}^{\phi}[g(u_n) - \rho_n Tw_n],$$

$$g(u_{n+1}) = g(u_n) - \alpha_n[g(u_n) - g(z_n) + \rho_n Tz_n - \rho_n Tw_n];\quad n = 0, 1, 2\cdots \tag{12}$$

其中,给定 $\gamma \in [1, 2)$; ρ_n, α_n满足:

$$\|\rho_n Tz_n - \rho_n Tw_n\|^2 \le \delta(\|g(u_n) - g(z_n)\|^2 + \|g(u_n) - g(z_n) + \rho_n Tz_n - \rho_n Tw_n\|^2),\ \delta \in (0, 1) \tag{13}$$

$$\alpha_n = \gamma \frac{\|g(u_n) - g(z_n)\|^2 + \|g(u_n) - g(z_n) + \rho_n Tz_n - \rho_n Tw_n\|^2 - \|\rho_n Tz_n - \rho_n Tw_n\|^2}{2\|g(u_n) - g(z_n) + \rho_n Tz_n - \rho_n Tw_n\|^2} \tag{14}$$

当 $\alpha = 1$时,算法 5就是前面的算法 4;当 $\eta(g(v), g(u)) = g(v) - g(u)$, $\phi(v, u) = \begin{cases} 0, & u \in K \\ +\infty, & \text{其他} \end{cases}$时就可以得到一个新的求解问题(2)的迭代算法. 类似还可以得到各种已知的或者新的作为算法 5的特例的算法. 也就是说算法 5统一了几种最近被研究的一些求解变分不等式的算法,同时注意该算法的迭代方向 $-[g(u) - g(z) + \rho Tz - \rho Tw]$和文献[1]中算法 3. 6的迭代方向 $-[g(u) - g(z)]$是不一样的,该算法的迭代方向是在文献[1]中算法 3. 6迭代方向的基础上结合了基本函数组合而成的新迭代方向;该算法也把文献[1]中隐式迭代算法 3. 6改进成了显式迭代算法.

下面讨论算法 5的收敛性:

定理 1　设引理 2的条件满足,设 $\bar{u} \in H$是问题(1)的解, u_{n+1}是由算法 5得到的近似解,若算子 T是 g-η-伪单调的,且满足若 $\langle u, \eta(x, y)\rangle \ge 0$,则 $\langle u, x - y\rangle \ge 0$; $\forall u, x, y \in H$,那么:

$$\|g(u_{n+1}) - g(\bar{u})\|^2 \le \|g(u_n) - g(\bar{u})\|^2 - \frac{\gamma(2 - \gamma)(1 - \delta)^2}{4}\{\|g(u_n) - g(z_n)\|^2 + \|g(u_n) - g(z_n) + \rho_n Tz_n - \rho_n Tw_n\|^2\} \tag{15}$$

证明　设 $\bar{u} \in H$是问题(1)的解,则 $\forall g(v) \in H$有: $\langle T\bar{u}, \eta(g(v), g(\bar{u}))\rangle + \phi(g(v)) - \phi(g(\bar{u})) \ge 0$,由于 T是 g-η-伪单调的,那么:

$$\langle Tv, \eta(g(v), g(\bar{u}))\rangle + \phi(g(v)) - \phi(g(\bar{u})) \ge 0 \tag{16}$$

令 $v = z_n$,代入式(16)中,有:

$$\langle \rho_n Tz_n, \eta(g(z_n), g(\bar{u}))\rangle + \rho_n\phi(g(z_n)) - \rho_n\phi(g(\bar{u})) \ge 0 \tag{17}$$

令 $x = g(u_n) - \rho_n Tw_n$, $u = g(z_n)$, $y = g(\bar{u})$代入式(3)有:

$$(g(z_n) - g(u_n) + \rho_n Tw_n, \eta(g(\bar{u}), g(z_n))) + \rho_n\phi, g(\bar{u})) - \rho_n\phi(g(z_n)) \ge 0 \tag{18}$$

因为 $\eta(x, y) + \eta(y, x) = 0$; $\forall x, y \in H$,所以将式(17)和式(18)相加得:

$$\langle g(z_n) - g(u_n) + \rho_n Tw_n - \rho_n Tz_n, \eta(g(\bar{u}), g(z_n))\rangle \ge 0$$

由已知条件若 $\langle u, \eta(x, y)\rangle \ge 0$,则 $\langle u, x - y\rangle \ge 0$; $\forall u, x, y \in H$,有:

$$\langle g(z_n) - g(u_n) + \rho_n Tw_n - \rho_n Tz_n, g(\bar{u}) - g(z_n)\rangle \ge 0 \tag{19}$$

所以,　$\|g(u_n) - g(\bar{u})\|^2 - \|g(u_{n+1}) - g(\bar{u})\|^2 =$

$$\|g(u_n)-g(\bar{u})\|^2-\|g(u_n)-g(\bar{u})-\alpha_n[g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n]\|^2=$$
$$-\alpha_n^2\|g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2+2\alpha_n\langle g(z_n)-g(u_n)+\rho_n Tw_n-\rho_n Tz_n,g(\bar{u})-g(u_n)\rangle\geq$$
$$-\alpha_n^2\|g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2+2\alpha_n\langle g(z_n)-g(u_n)+\rho_n Tw_n-\rho_n Tz_n,g(z_n)-g(u_n)\rangle=$$
$$-\alpha_n^2\|g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2+\alpha_n\{\|g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2+$$
$$\|g(z_n)-g(u_n)\|^2-\|\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2\} \tag{20}$$

显然,式 (20)是一个关于 α_n 的二次方程,当

$$\alpha_n^*=\frac{\|g(u_n)-g(z_n)\|^2+\|g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2-\|\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2\}}{2\|g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2}$$

时,式 (20)取得最大值. 为了使迭代步长加大,收敛速度更快,取松弛因子 $\gamma\in[1,2)$,且 $\alpha_n=\gamma\alpha_n^*$,即式 (14).

将式 (14)代入式 (20),得:

$$\|g(u_n)-g(\bar{u})\|^2-\|g(u_{n+1})-g(\bar{u})\|^2\geq$$
$$\gamma(2-\gamma)\frac{\|g(u_n)-g(z_n)\|^2+\|g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2-\|\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2\}^2}{4\|g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2}\geq$$
$$\gamma(2-\gamma)\frac{(1-\delta)^2\|g(u_n)-g(z_n)\|^2+\|g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2]^2}{4\|g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2}\geq$$
$$\frac{\gamma(2-\gamma)(1-\delta)^2}{4}[\|g(u_n)-g(z_n)\|^2+\|g(u_n)-g(z_n)+\rho_n Tz_n-\rho_n Tw_n\|^2]$$

即原命题结论得证.

下面举例说明满足定理 1条件的映射 $\eta: H\times H\to H$存在:

设 $H=R$,映射 $\eta: R\times R\to R$被定义为 $\eta(x,y)=\begin{cases} x-y, & 若\ |xy|<1 \\ |xy|(x-y), & 若\ 1\leq|xy|<2 \\ 2(x-y), & 若\ 2\leq|xy| \end{cases}$

很容易验证:

(1) $\langle\eta(x,y),x-y\rangle\geq|x-y|^2$; $\forall\ x,y\in H$成立,即 η是 1-强单调的;

(2) $\eta(x,y)=-\eta(y,x)$; $\forall\ x,y\in H$成立;

(3) $|\eta(x,y)|\leq2|x-y|$; $\forall\ x,y\in H$成立,即 η是 2-Lipschitz连续;

(4) 对于任意给定的 $x\in H$,函数 $h(y,u)=\langle x-u,\eta(y,u)\rangle=(x-u)\eta(y,u)$关于 y是 0-对角拟凸的 (0-对角拟凸的定义详细请见文献 [4]);

假设结论 (4)是错误的,那么应该存在一个有限集 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$以及 $u_0=\sum_{i-1}^{n}c_iy_i$,其中 $c_i\geq0$, $\sum_{i-1}^{n}c_i=0$; $i=1,2,\cdots,n$;有:

$$0<h(y_i,u_0)=\begin{cases} (x-u_0)(y_i-u_0), & 若\ |y_iu_0|<1 \\ (x-u_0)|y_iu_0|(y_i-u_0), & 若\ 1\leq|y_iu_0|<2 \\ 2(x-u_0)(y_i-u_0), & 若\ 2\leq|y_iu_0| \end{cases}$$

这说明 $(x-u_0)(y_i-u_0)>0$; $i=1,2,\cdots,n$. 因此就有 $0<\sum_{i-1}^{n}c_i(x-u_0)(y_i-u_0)=(x-u_0)(u_0-u_0)=0$, 显然这是不可能的,所以结论 (4) 正确.

(5) 若 $\forall\ u,x,y\in H\langle u,\eta(x,y)\rangle\geq0$成立,显然有 $\langle u,x-y\rangle\geq0$成立.

因此,η满足定理 1的所有条件.

定理 2 设 $\bar{u}\in H$是问题 (1)的解, u_{n+1}是由算法 5得到的近似解,且 H是一个有限维 Hilbert空间, $g: H\to H$是连续可逆映射,那么 $\lim_{n\to\infty}u_n=u^*$.

证明　设 $u^* \in H$是问题(1)的解,由式(15)知,序列$\{\| g(u^*) - g(u_n)\|\}$单调非增且序列$\{g(u_n)\}$有界,故序列$\{u_n\}$在 g的假设条件下有界. 又由(15)有:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma(2-\gamma)(1-\delta)^2}{4}\{\| g(u_n) - g(z_n)\|^2 + \| g(u_n) - g(z_n) + \rho_n Tz_n - \rho_n Tw_n\|^2\} \leq \| g(u_0) - g(u^*)\|^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\| g(u_n) - g(z_n)\| = 0 \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty}\| g(u_n) - g(z_n) + \rho_n Tz_n - \rho_n Tw_n\| = 0 \tag{22}$$

由引理 2可知 $J_{\partial_\eta \phi}(x)$是$\frac{\tau}{\delta}$ - Lipschitz连续的,故 $\| R(z_n)\| = \| g(z_n) - J_{\partial_\eta \phi}[g(z_n) - \rho_n Tz_n]\| = \| J_{\partial_\eta \phi}[g(u_n) - \rho_n Tw_n] - J_{\partial_\eta \phi}[g(z_n) - \rho_n Tz_n]\| \leq \frac{\tau}{\delta}\| g(u_n) - g(z_n) + \rho_n Tz_n - \rho_n Tw_n\|$,所以由式(22)有 $\lim_{n\to\infty} R(z_n) = 0$;设 $\bar{u}\in H$是序列$\{z_n\}$的一个聚点且子序列$\{z_{n_i}\}$收敛于 $\bar{u}$,由 $R(u)$的连续性知 $\lim_{n\to\infty} R(z_{n_i}) = R(\bar{u}) = 0$,所以 $\bar{u}$是问题(1)的解. 由式(21)及 g的可逆性知 $\lim_{n\to\infty} z_{n_i} = \bar{u} = \lim_{n\to\infty} u_{n_i}$,又由式(15)及 g的可逆有 $\| u_{n+1} - \bar{u}\|^2 \leq \| u_n - \bar{u}\|^2$, $\forall\ n\geq 0$. 所以序列$\{u_n\}$有惟一聚点,即 $\lim_{n\to\infty} u_n = u^*$.

参考文献:

[1] NOOR M A. Projection-proximal methods for general variational inequalities[J]. J. Math. Anal. Appl, 2006, 318: 53-62

[2] NOOR M A. Proximal Methods for Mixed Quasivariational Inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2002, 115(2): 453-459

[3] NOOR M A, NOOR K I. On General Mixed Quasivariational Inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, 120(3): 579-599

[4] DING X P, LUO C L. Perturbed Proximal point algorithms for general quasi - variation - like inclusions[J]. J. Comput Appl Math, 2000, 113: 153-165

[5] 姚莉. 一般混合似变分不等式组的迭代算法[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版, 2008, 25(6): 560-563

Existence of solutions and iterative methods for generalized mixed variational inequalities

YAO Li

(Mathematics and Statistics College, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In this paper, we introduce and study a class of generalized mixed variational inequalities, applying two concepts of η-subdifferential and η-proximal mappings of proper functionals, we discuss existence of solutions for generalized mixed variational inequalities. Combining splitting method and self-adaptive iterative method, we suggest and analyze a explicit iterative method for solving generalized mixed variational inequalities. The new iterative method converge sunder certain mild conditions.

Key words: variational inequalities; η-subdifferential; η-proximal mappings; explicit iterative methods

责任编辑:李翠薇