

文章编号: 1672 - 058X(2009)03 - 0233 - 04

拉压不同模量横力弯曲梁的算法

申加辉

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

摘要:对于处在平面复杂应力状态下的横力弯曲梁,当引入拉压不同模量后,结构内力计算成为非线性问题;对拉压不同模量横力弯曲梁提出计算假定,推导单元中和轴公式并构造了算法;通过实例计算对比分析不同模量与经典力学相同模量两种方法计算结果的差异,提出对该类结构计算的合理建议以及利用不同模量对结构进行优化的结论.

关键词:拉压不同模量;横力弯曲梁;中性轴

中图分类号: TU311

文献标识码: A

1 基本概念和假设

在不同模量力学理论中,假定不同模量材料是均匀的和各向同性的,材料各点的性质相同,没有最优.但是,由于给定点(或区域)主应力 $\sigma_i (i=1, 2, 3)$ 符号(由结构和外荷载确定)的不同,却表现出不同的弹性性质.当 $\sigma_i > 0$ 时,相应的弹性模量和泊松比为 E^+ 和 ν^+ ;当 $\sigma_i < 0$ 时,相应的是 E^- 和 ν^- .假定所分析的材料在任意应力状态下只发生弹性小变形,并服从连续介质力学的若干规律,其中包括平衡方程、几何方程、变形连续方程等,与相同模量弹性力学的差别仅表现在应力与应变之间的物理关系中.

对横力弯曲梁单元采用平面假定,认为梁单元在弯矩和轴力联合作用下,横截面在变形后仍为平面,且与梁轴正交.在选择不同模量 E^+ 和 E^- 时,取用正应力 σ_x 的符号,忽略剪应力 τ_{xy} 的影响.这比根据主应力 σ_i 的符号来决定 E^+ 和 E^- 给数值计算带来了若干方便.

由平面假设可知,在梁单元的横截面内可能是全拉区或全压区;亦可能截面上部是拉压而下部是压区,或相反.这是由梁单元各横截面上的弯矩 M 和轴力 N 决定的.当在某截面上既有拉区又有压区时,其区域高度 h_1 和 h_2 是一个重要参数.

2 不同模量梁单元

不同模量梁单元的节点及其参数如图 1 所示,其轴向位移和挠度分别用零阶和一阶埃尔米特多项式表示,它们是: $u = N_1 u_i + N_2 u_j; \quad v = N_3 v_i + N_4 v_i + N_5 v_j + N_6 v_j$

其中, $N_1 = 1 - x/l, N_2 = x/l, N_3 = 1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3, N_4 = x - 2x^2/l + x^3/l^2, N_5 = 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3, N_6 = -x^2/l + x$

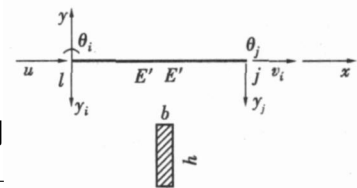


图 1 梁单元

收稿日期: 2009-04-16;修回日期: 2009-05-10.

作者简介:申加辉(1984-),男,山东日照人,硕士研究生,从事结构工程研究.

不同模量梁单元的正应变 ϵ_x 由弯曲应变和拉、压应变组合, 即 $\epsilon_x = -\frac{d^2 y}{dx^2} y + \frac{du}{dx}$, 或表示为:

$$\epsilon_x = N_1 u_i - N_3 y v_i - N_4 y_i + N_2 u_j - N_5 y v_j - N_6 y_j = [N_1 - N_3 y - N_4 y + N_2 - N_5 y - N_6 y] \{d\} = [B] \{d\}$$

式中, $\{d\} = [u_i, v_i, u_j, v_j]^T$, $[B] = [N_1 - N_3 y - N_4 y + N_2 - N_5 y - N_6 y]$.

根据应变 ϵ_x 的符号和弹性模量 E^+ 和 E^- 的不同, 梁单元任意横截面的正应力 σ_x , 应属于下列 4 种情况之一 (图 2):

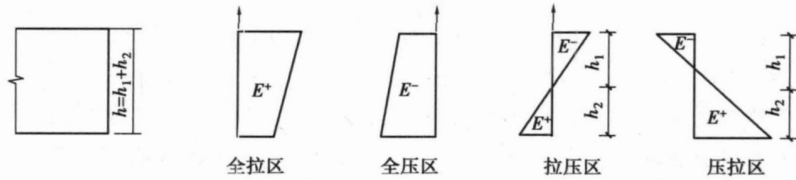


图 2 应力图

- (1) 全拉区: $\epsilon_x > 0, \sigma_x = E^+ \epsilon_x, y \in [-h/2, h/2]$.
- (2) 全压区: $\epsilon_x < 0, \sigma_x = E^- \epsilon_x, y \in [-h/2, h/2]$.
- (3) 拉、压区 (拉压区): $\epsilon_x > 0, \sigma_x = E^+ \epsilon_x, y \in [0, h_2]$; $\epsilon_x < 0, \sigma_x = E^- \epsilon_x, y \in [-h_1, 0]$.
- (4) 压、拉区 (压拉区): $\epsilon_x < 0, \sigma_x = E^- \epsilon_x, y \in [0, h_1]$; $\epsilon_x > 0, \sigma_x = E^+ \epsilon_x, y \in [-h_2, 0]$.

不同模量梁单元的刚度矩阵, 对拉压区分析:

$$[k] = b \left[E^- \int_0^{-h_2} [B]^T [B] dy \right] dx + E^+ \left[\int_0^{h_1} [B]^T [B] dy \right] dx$$

应加以注意的是, 梁单元各横截面的应力区的确定 (即确定 σ_x , ϵ_x , h_1 和 h_2), 依赖于梁的轴力和弯矩, 通常它们是 x 的函数, 因此上式中的 σ_x , ϵ_x , h_1 和 h_2 对各截面是不同的. 为此, 把梁单元沿长度分为若干段, 视段内的内力以及 h_1, h_2 是常量. 于是, 上列积分表示为:

$$[k] = \sum_{n=1}^M \left[E^- \int_{l_p}^{l_q} (b \int_{-h_2}^0 [B]^T [B] dy) dx + E^+ \int_{l_p}^{l_q} (b \int_0^{h_1} [B]^T [B] dy) dx \right] = \sum_{n=1}^M [E^- \int_{l_p}^{l_q} [Q_1] dx + E^+ \int_{l_p}^{l_q} [Q_2] dx] \quad (1)$$

$$[Q_1] = b \int_{-h_2}^0 [B]^T [B] dy, \quad [Q_2] = b \int_0^{h_1} [B]^T [B] dy$$

将式 (1) 积分, 可以得到拉压不同模量梁单元的刚度矩阵. 若将 $E^+ = E^- = E; h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$ 代入刚度矩阵, 可得到熟知的相同弹性模量梁单元的刚度矩阵 $[k]$.

3 分区高度 h_1 和 h_2

在不同模量横力弯曲梁算法中, 要求给定或确定梁单元各截面的正应力符号及其分区类型, 对拉压区和压拉区还需计算 h_1 和 h_2 .

设梁单元在某一段内的平均弯矩为 \bar{M} , 平均轴力为 \bar{N} , 以拉压区为例, 设分区高度分别为 h_1 和 h_2 , 截面上、下边缘的正应变为 ϵ_1 和 ϵ_2 , 根据平面假设, 应分别满足下列非线性方程组和不等式:

$$\left. \begin{aligned} bE^+ h_1 + bE^- h_2 &= 2\bar{N}; \quad bE^+ h_1^2 - bE^- h_2^2 = 3\bar{M} - 3\bar{N} (h_1 - h_2/2) \\ h_1 + h_2 &= h; \quad h_2 = -h_1; \quad \text{其中 } \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 < 0, h_1, h_2 \in (0, h) \end{aligned} \right\}$$

由此求得受拉区高度为:

$$h_1 = h_p = -\frac{B}{3A} + \frac{(1-3i)J}{3 \times 2^{2/3} \times A \times \sqrt[3]{F + \sqrt{4J^3 + F^2}}} + \frac{(1+i\sqrt{3}) \sqrt[3]{F + \sqrt{4J^3 + F^2}}}{6 \times 2^{1/3} \times A}$$

其中, $A = 2N(E^+ - E^-)$; $B = -3M[(E^+ - E^-) - 2E^- h \bar{N}]$; $C = -6E^- h(Nh + M)$; $D = E^- h^2(2Nh + 3M)$,
 $J = -B^2 + 3AC$; $F = -2B^2 + 9ABC - 27A^2D$.

4 计算方法和算例分析

4.1 计算方法

在不同模量横力弯曲梁的算法中,取用了与相同模量一样的单元位移函数,对不同模量问题它是近似的,亦采用 $\{R_e\} = [N]^T \{p\}$ 计算节点荷载. 显然,它与相同模量问题不同,近似的位移函数给节点荷载以误差. 单元刚度矩阵 $[k]$ 的公式与相同模量也不同. 由于 $E^+ \neq E^-$,梁的中性层不在梁高的 $h/2$ 处,此处通过截面上的内力 M, N 来确定横截面的分区高度 h_1, h_2 . 但是,在确定 h_1, h_2 之前,并不知道各截面的 M, N . 因此,采用逐次迭代法,即利用上一次的 M^{n-1}, N^{n-1} 来确定本次计算的 h_1^n, h_2^n 和分区,通过本次各步骤的计算将得到本次的 M^n, N^n ,进一步将利用 M^n, N^n 来确定 h_1^{n+1}, h_2^{n+1} 和分区以及 M^{n+1}, N^{n+1} ,以此类推. 不妨,在第一次计算时,假定每一横截面的分区高度为 $h_1 = h_2 = h/2$,计算单标刚度,可求得位移解 $\{u_1\}$. 然后,由 $\{u_1\}$ 按一般方法求得杆端力,进而求得各横截面上的内力 M, N . 再确定各横截面的分区高度 h_1, h_2 ,这样又可计算各杆刚度,以求得新的一组位移解 $\{u_2\}$,以此类推,直至对于选定的位移误差控制参数满足 $|u_{i+1} - u_i| < \epsilon$ 为止.

4.2 算例

如图 3,简支梁受均布荷载作用,用经典力学同模量理论、拉压不同模量理论分别计算. 已知分两种情况:
 情况 1: $E = 0.5(E^+ + E^-) = 2.55 \times 10^7$ 不变,改变 E^+ 及 E^- ;
 情况 2: $E^- = 2.55 \times 10^7$,改变 E^+ 及 E ,取 $E^+/E^- = 1/4, 1/3, 5/1, 3/5, 4/3$ (仅列出部分结果).

表 1 经典力学同模量理论梁 ($x = 1.5 \text{ m}$) 截面的中性轴、应力、挠度

E^+/E^-	$E^+ / (\text{kN/m}^2)$	$E^- / (\text{kN/m}^2)$	h_p / m	$\sigma_{\text{max}}^+ / (\text{kN/m}^2)$	$\sigma_{\text{max}}^- / (\text{kN/m}^2)$	$\tau_{xy}^+ / (\text{kN/m}^2)$	$\tau_{xy}^- / (\text{kN/m}^2)$	挠度 / m ($y = 0$)
1.0	2.55E+7	2.55E+7	0.22	8762.9	-8762.9	217.9	217.9	3.17E-3

表 2 拉压不同模量弹性梁 ($x = 1.5 \text{ m}$) 截面的中性轴、应力、挠度 (情况 1)

E^+/E^-	$E^+ / (\text{kN/m}^2)$	$E^- / (\text{kN/m}^2)$	h_p / m	$\sigma_{\text{max}}^+ / (\text{kN/m}^2)$	$\sigma_{\text{max}}^- / (\text{kN/m}^2)$	$\tau_{xy}^+ / (\text{kN/m}^2)$	$\tau_{xy}^- / (\text{kN/m}^2)$	挠度 / m ($y = 0$)
1.0	2.55E+7	2.55E+7	0.220	8762.9	-8762.9	217.9	217.9	3.17E-3
1/1.5	2.04E+7	3.06E+7	0.242	7950.1	-9756.9	203.6	234.1	3.37E-3
1/2	1.70E+7	3.40E+7	0.258	7486.8	-10562.9	193.7	247.3	3.50E-3
1/2.5	1.46E+7	3.65E+7	0.270	7164.9	-11278.1	186.8	257.9	3.75E-3

表 3 拉压不同模量弹性梁 ($x = 1.5 \text{ m}$) 截面的中性轴、应力、挠度 (情况 2)

E^+/E^-	$E^+ / (\text{kN/m}^2)$	$E^- / (\text{kN/m}^2)$	h_p / m	$\sigma_{\text{max}}^+ / (\text{kN/m}^2)$	$\sigma_{\text{max}}^- / (\text{kN/m}^2)$	$\tau_{xy}^+ / (\text{kN/m}^2)$	$\tau_{xy}^- / (\text{kN/m}^2)$	挠度 / m ($y = 0$)
1/1.5	2.04E+7	3.06E+7	0.242	7950.1	-9756.9	203.6	234.1	3.37E-3
1/2	1.70E+7	3.40E+7	0.258	7486.8	-10562.9	193.7	247.3	3.50E-3
1/2.5	1.46E+7	3.65E+7	0.270	7164.9	-11278.1	186.8	257.9	3.75E-3

4.3 结果分析

(1) 当材料的拉压弹性模量改变时, 梁的中性轴呈有规律的变化, 见表 1, 随着 E^+ 的增加, 受拉区高度减少, 反之则增加. 随着 E^+/E^- 的比值增加, 中性轴偏移的速率逐渐变小.

(2) 由于计入了不同模量, 截面的正应力及剪应力变化规律, 不同于同模量的正应力及剪应力. 同模量的正应力及剪应力对称于中性轴, 而不同模量的正应力及剪应力不对称于中性轴. 以中性轴为界, 不仅拉区的正应力及剪应力面积不等于压区正应力及剪应力, 且对应的拉、压区相应点, 其应力值也不相等.

(3) 梁的正应力及剪应力均随着拉压模量比值的变化而变化, 拉应力 σ_x^+ 及拉区剪应力 τ_x^+ 随着 E^+/E^- 减小而减小, 压应力 σ_x^- 及压区剪应力 τ_x^- 随 E^+/E^- 的减小而增加, 这一结果完全吻合刚度调整内力的规律.

(4) 当截面的总刚度不变, 仅改变其分配, 梁位移随着 E^+/E^- 的增大而增大, 说明截面刚度的不均匀将使位移增大. 当 E^+/E^- 在 $1/4 \sim 4$ 之间变化时, 不同模量与相同模量两种方法计算误差达 30%.

(5) 情况 2 见表 3, 当 E^+/E^- 比值变化, 而 E^- 不变, 则截面平均模量已变化, 其正应力响应随 E^+/E^- 的变化规律, 基本同情况 1. 说明应力对 E^+/E^- 的比值敏感, 而对 E^+ 或 E^- 的绝对值不敏感. 增加材料的 E^+ 或 E^- , 而不改变 E^+/E^- , 并不能减小应力. 但对挠度, 情况 2 远比情况 1 的误差大, 当缩小 E^+ , $E^+/E^- = 1/4$ 与同模量 $E = E^+ = E^-$ 相比, 两种方法的挠度误差已达 58%.

参考文献:

- [1] 张允真, 王志锋. 不同拉压模量刚架的算法 [J]. 大连理工大学学报, 1989, 29(1): 23-32
- [2] 何晓婷, 陈山林. 拉压不同模量弹性结构的非线性力学行为研究 [D]. 重庆: 重庆大学博士学位论文, 2007
- [3] 姚文娟, 叶志明. 不同模量理论弹性支承连续梁及框架 [J]. 力学与实践, 2004, 26(4): 37-41
- [4] 姚文娟, 叶志明. 用拉压不同模量理论解静定平面刚架 [J]. 上海大学学报: 自然科学版, 2004, 10(6): 606-611

Transverse bending beam algorithm of different tension and compression modulus

SHEN Ji-hui

(Civil Engineering School, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: With regard to transverse bending beam under complex stress state in plane, when different tension and compression modulus is introduced, the pole bending rigidity is a function of internal force so that the calculation of structural internal force becomes nonlinear problem. Calculation supposition is put forward on different modulus of transverse bending beam to deduce unit neutralizing axis formula and construct its algorithm. Through example calculation to compare the difference of such two algorithms as the different modulus and modulus of classical mechanics, reasonable suggestion is pointed out for this kind of calculation and for using different modulus to optimize the structure.

Key words: different tension and compression modulus; transverse bending beam; neutral axis

责任编辑: 李翠薇