文章编号: 1672 - 058X(2009)03 - 0209 - 04

随机环境马氏链的常返性与暂留性*

宋明珠,姚毓才

(铜陵学院 教务处,安徽 铜陵 244000)

摘　要:对于随机环境中的马氏链,给出两个状态之间是一致可达和状态是常返、暂留和一致暂留的定义;讨论了在一致可达的条件下,两个状态之间的性质关系.

关键词:随机环境;马氏链;一致可达;常返;暂留;一致暂留

中图分类号: O211.62　　**文献标识码**: A

1　定义与记号

随机环境中马氏链的研究是随机过程的一项重要内容,Cogburn与 Orey等人对其一般理论进行了研究,得出了一系列的结果,并提出了一系列未解决的问题.李应求在随机环境马氏链的研究中,引入了 π - 不可约性和强 π - 不可约性等概念,并给出了随机环境中的马氏链常性判定的几个充分条件,从而部分地回答了 Orey未解决的问题.而肖争燕,胡迪鹤则在文献[3]中给出了绕积马氏链的特征数和状态的定义,讨论了随机环境中马氏链的状态分类,特别举例说明经典马氏链和随机环境马氏链的状态区别.众所周知,有关经典马氏链的理论已十分深入和完整,但在随机环境情形中,这方面的研究才刚刚起步.此处,在前人研究的基础上,引入了两个状态之间一致可达的概念,给出了随机环境中马氏链两个状态在一致可达条件下常返性和暂留性的关系,从而推广了经典马氏链的一些结论.

沿用文献[1-6]中的记号和定义,设 N_+ 表示非负整数集, N 表示整数集, (Ω, F, P)是一概率空间, X至多可数, A是 X的离散 σ - 代数, (Θ, B)为任意可测空间, $\vec{\xi} = \{\xi_n : n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$和 $\vec{X} = \{X_n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$分别是 (Ω, F, P)上取值于 Θ 和 X的随机序列, $\{P(\theta)\ \theta\in\Theta\}$是 (X, A)上的一族转移函数,且假定对任意的 $A\in\mathbf{A}$, $P(, \cdots, \mathbf{A})$关于 $B\times\mathbf{A}$ 可测. $\Theta^N = \prod_{j=-\infty}^{\infty}\Theta_j, B^N = \prod_{j=-\infty}^{\infty}B_j$, 其中 $\Theta_j = \Theta, B_j = B, \vec{\theta} = \{\theta_n\} = \{\cdots, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \cdots\}$是 Θ^N 的坐标过程. T是推移变换: $(T\vec{\theta})_n = \theta_{n+1}, n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$. 设 π 是可测空间 (Θ^N, B^N)上的任一概率测度,且满足 $\pi T^{-1} = \pi$,于是 $\{\Theta_n, n\in Z\}$是概率空间 $\{\Theta^N, B^N, \pi\}$上的取值于 Θ 的严平稳序列. 对任意 $\vec{\theta} = (\theta_n, n\in Z)\in\Theta^N$,任何 $-\infty < m < n < \infty$,记 $P(\theta_m, \cdots, \theta_n) = P(\theta_m)\cdots(\theta_n)$,即 $P(\theta_m, \cdots, \theta_n; x, y) = P(\theta_m)\cdots(\theta_n)(x, y)$. 记 $\mu = k\times\pi$, k是 X上的计数测度, $E = X\times\Theta^N$, $\varepsilon = \mathbf{A}\times B^N$,定义 (E, ε)上的转移函数为:

$$P(x, \vec{\theta}; \{y\}\times B) = P(\theta_0; x, y) I_B(T\vec{\theta}), B\in B^N$$

定义 1　如果对任意的 $A\in\mathbf{A}$, $n\in N_+$,有:

$$P(X_0\in A \mid \vec{\xi}) = P(X_0\in A \mid \vec{\xi}_{-\infty}^{0}) \tag{1}$$

收稿日期: 2009 - 02 - 26;**修回日期**: 2009 - 03 - 20.

*基金项目:安徽省高等学校青年教师科研资助计划(2008jq1140)和高校省级自然科学研究项目(kj2009B096).

作者简介:宋明珠(1979 -),女,安徽无为人,硕士研究生,从事随机环境中的马氏链研究.

$$P(X_{n+1}\in A \mid X_0^n,\vec{\xi}) = P(\xi_n; X_n, A) \tag{2}$$

则称 $\vec{X}$ 是随机环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链, $\vec{\xi}$ 为随机环境序列.

2 主要结果及证明

设 $x\in X,\vec{\theta}\in\Theta^N, C\in\varepsilon, B\in B^N$. 记 $(C)_x=\{\vec{\theta}:(x,\vec{\theta})\in C\}$, $[C]_x=\{(x,\vec{\theta})\ \vec{\theta}\in(C)_x\}$; $Q(x,\vec{\theta};C)=P_{x,\vec{\theta}}(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty}(X_i,T^i\vec{\theta})\in C)$; $G(x,\vec{\theta};C)=\sum_{n=1}^{\infty}P_{x,\vec{\theta}}((X_n,T^n\vec{\theta})\in C)$; $L(x,\vec{\theta};C)=P_{x,\vec{\theta}}(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n,T^n\vec{\theta})\in C)$; $F(L;\alpha)=\{(x,\vec{\theta})\in E\ L(x,\vec{\theta};F)=\alpha\}$; $f_n(x,\vec{\theta};y,B)=P_{x,\vec{\theta}}((X_1,T\vec{\theta})\notin\{y\}\times B,\cdots,(X_{n-1},T^{n-1}\vec{\theta})\notin\{y\}\times B,(X_n,T^n\vec{\theta})\in\{y\}\times B)$.

定义 2 称状态 $x\in X$ 一致可达状态 $y\in X$, 如果存在 $\delta>0$, 使 $\pi\{\vec{\theta};L(x,\vec{\theta};[E]_y)\geq\delta\}=1$.

定义 3 称状态 x 是常返的, 如果 $\pi\{\vec{\theta};G(x,\vec{\theta};[E]_x)=\infty\}=1$; 称状态 x 是一致暂留的, 如果存在 $M<\infty$, 使 $\pi\{\vec{\theta};G(x,\vec{\theta};[E]_x)\leq M\}=1$; 称状态 x 是暂留的, 如果存在正实数 $\{M_i,i\geq1\}$ 和 Θ^N 的一分划 $\{B_i,i\geq1\}$, 使对所有的 $\vec{\theta}\in B_i$, 都有 $G(x,\vec{\theta};\{x\}\times B_i)\leq M_i$, $i\geq1$.

引理 1 设 $B\in\beta$, $\pi B=1$, 则 $\pi\{\vec{\theta};\forall n\geq0,T^n\vec{\theta}\in B\}=1$.

证明 记 $B_1=\{\vec{\theta};\forall n\geq0,T^n\vec{\theta}\in B\}$, 则 $B_1^c=\{\vec{\theta};\exists n\geq0,T^n\vec{\theta}\notin B\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}(T^{-n}B)^c$, 因为 π 是平稳的, 所以 $\forall n\geq0$, $\pi T^{-n}B=\pi B=1$, 从而 $\pi B_1^c\leq\sum_{n=0}^{\infty}\pi(T^{-n}B)^c=0$, 即 $\pi B_1^c=0$, 所以 $\pi B_1=1$.

引理 1表明, 如果条件是关于 $\vec{\theta}$ 的命题, 并对 π - a.e. $\vec{\theta}$ 成立, 则对 $\forall n\geq0$, 关于 $T^n\vec{\theta}$ 的命题 π - - a.e. $\vec{\theta}$ 也成立, 文后不再说明.

引理 2[3] 对任意的 $(x,\vec{\theta})\in E$, $F\in\varepsilon$ 有:

$$Q(x,\vec{\theta};F)=L(x,\vec{\theta};F)-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{y\in X}P(\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})I_{(F)_y}T^n\vec{\theta}(1-L(y,T^n\vec{\theta};F))$$

引理 3[3] $L(x,\vec{\theta};C)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x,\vec{\theta};C)$, $C\in\varepsilon$.

定理 1 设状态 x 是一致暂留的, 且 y 一致可达 x, 则设状态 y 是一致暂留的.

证明 对任意的 $\vec{\theta}\in\Theta^N$, 有:

$$\begin{aligned}G(y,\vec{\theta};[E]_x)&=\sum_{n=1}^{\infty}P_{y,\vec{\theta}}(X_n=x)=\\&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}f_k(y,\vec{\theta};x)P_{x,T^k\vec{\theta}}(X_{n-k}=x)=\\&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}f_k(y,\vec{\theta};x)P_{x,T^k\vec{\theta}}(X_n=x)=\\&\sum_{k=1}^{\infty}f_k(y,\vec{\theta};x)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(y,\vec{\theta};x)\sum_{n=1}^{\infty}P_{x,T^k\vec{\theta}}(X_n=x)=\\&\sum_{k=1}^{\infty}f_k(y,\vec{\theta};x)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(y,\vec{\theta};x)G(x,T^k\vec{\theta};[E]_x)\end{aligned} \tag{3}$$

因为 x 是一致暂留的, 所以对任意的 $\vec{\theta}\in\Theta^N$, $\exists M<\infty$ 有 $G(x,T^k\vec{\theta};[E]_x)\leq M$, 且 $L(y,\vec{\theta};[E]_x)\leq1$. 由引理 2可得:

$$\text{式}(3)=L(y,\vec{\theta};[E]_x)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(y,\vec{\theta};x)G(x,T^k\vec{\theta};[E]_x)\leq$$

$$L(y,\vec{\theta};[E]_x)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(y,\vec{\theta};x)M\le 1+M \tag{4}$$

又因为 y一致可达 x,所以存在 $\delta>0$,对任意的 $\vec{\theta}\in\Theta^N$ 有 $L(x,\vec{\theta};y)\ge\delta$ 而:

$$\begin{aligned}
&G(y,\vec{\theta};[E]_x)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{y,\vec{\theta}}(X_n=x)=\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}P_{y,\vec{\theta}}(X_k=y)f_{n-k}(y,T^k\vec{\theta};x)=\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{y,\vec{\theta}}(X_k=y)f_n(y,T^k\vec{\theta};x)=\\
&\sum_{n=1}^{\infty}f_n(y,\vec{\theta};x)+\sum_{k=1}^{\infty}P_{y,\vec{\theta}}(X_k=y)\sum_{n=1}^{\infty}f_n(y,T^k\vec{\theta};x)=\\
&L(y,\vec{\theta};[E]_x)+\sum_{k=1}^{\infty}P_{y,\vec{\theta}}(X_k=y)L(y,T^k\vec{\theta};[E]_x)\ge\\
&\delta(1+G(y,\vec{\theta};[E]_y))
\end{aligned}\tag{5}$$

由式(3)(4)(5)可得 $G(y,\vec{\theta};[E]_y)\le\frac{1+M-\delta}{\delta}$.即 $\pi\left\{\vec{\theta};G(y,\vec{\theta};[E]_y)\le\frac{1+M-\delta}{\delta}\right\}=1$.从而 y是一致暂留的.

定理 2　设状态 x是常返的,且 x一致可达 y,则设状态 y是常返的.

证明　因为 x一致可达 y,所以存在 $\delta>0$,使 $\forall\theta\in\Theta^N$ 有 $L(x,\vec{\theta};[E]_y)\ge\delta$ 所以:

$$\begin{aligned}
&G(x,\vec{\theta};[E]_y)=\sum_{n=1}^{\infty}P_{x,\vec{\theta}}(X_n=y)=\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}P_{x,\vec{\theta}}(X_k=x)f_{n-k}(x,T^k\vec{\theta};y)=\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{x,\vec{\theta}}(X_k=x)f_n(x,T^k\vec{\theta};y)=\\
&\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x,\vec{\theta};y)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{x,\vec{\theta}}(X_k=x)f_n(x,T^k\vec{\theta};y)=\\
&L(x,\vec{\theta};y)+\sum_{k=1}^{\infty}P_{x,\vec{\theta}}(X_k=x)L(x,T^k\vec{\theta};y)\ge\\
&\delta(1+G(x,\vec{\theta};[E]_x))
\end{aligned}$$

因为 x是常返的,所以 $G(x,\vec{\theta};[E]_x)=\infty$,从而 $G(x,\vec{\theta};[E]_y)=\infty$, $\forall\vec{\theta}\in\Theta^N$.又因为对任意 $\vec{\theta}\in\Theta^N$ 有:

$$\begin{aligned}
&G(x,\vec{\theta};[E]_y)=\sum_{n=1}^{\infty}P_{x,\vec{\theta}}(X_n=y)=\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x,\vec{\theta};y)P_{y,T^k\vec{\theta}}P_{y,T^k\vec{\theta}}(X_{n-k}=y)=\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}f_k(x,\vec{\theta};y)P_{y,T^k\vec{\theta}}(X_n=y)=\\
&\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x,\vec{\theta};y)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x,\vec{\theta};y)\sum_{n=1}^{\infty}P_{y,T^k\vec{\theta}}(X_k=y)=\\
&L(x,\vec{\theta};y)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x,\vec{\theta};y)G(y,T^k\vec{\theta};[E]_y)\le\\
&1+G(y,T^k\vec{\theta};[E]_y)
\end{aligned}$$

所以 $G(y, T^k\vec{\theta}; [E]_y) = \infty$,由引理1知 y是常返的.

定理3 若 $\mu\{(y,\vec{\theta}), Q(y,\vec{\theta}; [E]_x) = 0\} = 1$,则 x是暂留的.

证明 因为 $\mu\{(y,\vec{\theta}), Q(y,\vec{\theta}; [E]_x) = 0\} = 1$,所以令 $E_0 = [E]_x$, $E_{n+1} = E_n \cap E_n(L; 1)$, $n \geq 0$,所以 E_n是单调下降的.记 $A_n = E_n - E_{n+1}$,所以 $A_n = \{x\} \times \{\vec{\theta}; L(x,\vec{\theta}; E_{n-1}) = 1, L(x,\vec{\theta}; E_n) < 1\}$,由文献[3]中的定理2.1证明可知, $\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = \varnothing$,所以 $[E]_x = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$,且 $A_n \cap A_n(L; 1) = \varnothing$.

令 $B_{n,m} = \{\vec{\theta}; (x,\vec{\theta}) \in A_n, L(x,\vec{\theta}; A_n) < 1 - \frac{1}{m}\}$,由 $A_n \cap A_n(L; 1) = \varnothing$知, $A_n = \{x\} \times \bigcup_{m=0}^{\infty} B_{n,m}$.由引理2可知, $\forall \vec{\theta}$有:

$$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty} P(\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}; x, x) I_{B_{n,m}}(T^n\vec{\theta}) \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}; x, x) I_{B_{n,m}}(T^n\vec{\theta})(1 - L(x, T^n\vec{\theta}; A_n)) \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}; x, x) I_{(A_n)_x}(T^n\vec{\theta})(1 - L(x, T^n\vec{\theta}; A_n)) =$$

$$L(x,\vec{\theta}; A_n) - Q(x,\vec{\theta}; A_n) \leq 1$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}; x, x) I_{B_{n,m}}(T^n\vec{\theta}) \leq m$$

即 $G(x,\vec{\theta}; \{x\} \times B_{n,m}) \leq m$,又因为 $[E]_x = \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{m=0}^{\infty} B_{n,m}$,所以存在正实数 $\{M_i, i \geq 1\}$和 Θ^N 的一分划 $\{B_{n,m}, n \geq 1, m \geq 1\}$,使对所有的 $\vec{\theta} \in \Theta^N$,都有 $G(x,\vec{\theta}; \{x\} \times B_{n,m}) \leq M_i$, $i \geq 1$,从而 x是暂留的.

参考文献:

[1] 李应求.双无限环境中Markov链的常返性和不变测度[J].中国科学(A辑),2001,31(8):702-703

[2] 李应求.双无限随机环境中的常返马氏链[J].数学学报,2007,50(5):1099-1110

[3] 肖争艳,胡迪鹤.绕积马氏链的状态分类[J].数学物理学报,2003,23(3):306-313

[4] COGBUM R. Markov Chains in random environments: the case of Markovian environment[J]. Ann. Prob, 1980, 8(3): 908-916

[5] COGBUM R. The ergodic theory of Markov Chains in random environments[J]. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1984, 66(2): 109-128

[6] OREY S. Markov chains with stochasitically transtion probabilities[J]. Ann. prob, 1991, 19(3): 907-928

[7] 崔静.随机环境中马氏链的状态研究[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2008,25(1):23-24

Recurrent and transience properties of Markov Chains in random environments

SONG Ming-zhu, YAO Yu-cai

(Dean's Office, Tongling University, Anhui Tongling 244000, China)

Abstract: The concept of uniformly accessible is introduced into the research filed of Markov chains in random environments, and concepts of recurrence, transience and uniformly transience are given. In this paper, some properties of two states in uniformly accessible condition are discussed.

Key words: random enviroments; Markov chains; uniformly accessible; recurrence; transience; uniformly transience

责任编辑:李翠薇