文章编号:1672-058X(2009)02-0174-04

沿周边径向张拉圆薄膜的应力分布

吴建梁

(重庆大学 土木工程学院,重庆 400045)

摘　要:利用应力应变关系和变形协调方程,建立了圆薄膜沿周边径向均匀张拉一定位移后的基本方程.通过引入无量纲参数进行化简并得到了其解析解,进而得出了圆薄膜内的应力分布公式,并利用有限元模型验证了其正确性.结果表明:沿圆薄膜外边界均匀张拉一定位移后,膜内径向应力与环向应力相等,应力分布均匀且与张拉位移量成正比.

关键词:圆薄膜;预张力;径向张拉;解析解

中图分类号:O 343.5;TU 13　　　　**文献标识码**:A

目前国内已研制出膜片式压力传感器[1,2],膜片是此类传感器的核心功能元件.在仪器制造过程中往往先在薄膜内建立预张力[3],以增强弹性薄膜的抵抗变形能力和承受压力的能力.建立预张力的方法有多种,张拉圆薄膜外边界简单易行,但是张拉后薄膜内应力分布状态如何,目前研究较少.此处拟采用弹性力学方法推导沿周边径向张拉圆薄膜的应力分布.

1　基本方程的建立和解答

在外边界上有径向张拉位移 u_2 而无横向变形的圆薄膜计算如图 1 所示:

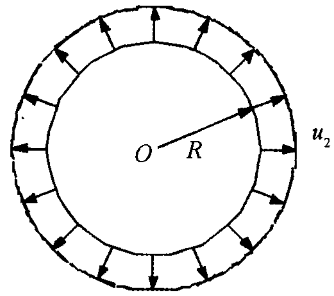

图 1　圆薄膜沿外周边向外张拉示意图

应变位移关系为[4]:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2 \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

径向张拉则无横向变形,则有:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = 0 \tag{2}$$

由式(1)、(2) 有:

收稿日期:2009-01-10;**修回日期**:2009-03-24.

作者简介:吴建梁(1982-),男,湖南人,硕士研究生,从事结构非线性力学方面的研究工作.

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

应力应变关系为[5]:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_t)\\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t+\nu\varepsilon_r)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

并记:

$$\left.\begin{aligned}N_r &= \sigma_r h\\ N_t &= \sigma_t h\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

将式(1)(4) 代入式(5),得:

$$\left.\begin{aligned}N_r &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_t) = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\nu\frac{u}{r}\right]\\ N_t &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t+\nu\varepsilon_r) = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{u}{r}+\nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right]\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

圆薄膜变形协调方程为[5]:

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2h\sigma_r)\right]+\frac{Eh}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2 = 0 \tag{7}$$

将式(2) 代入式(7) 化为:

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2h\sigma_r)\right] = 0 \tag{8}$$

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2N_r)\right] = 0 \tag{9}$$

或者改写为:

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[N_r+\frac{\mathrm{d}(rN_r)}{\mathrm{d}r}\right] = 0 \tag{10}$$

在圆薄膜平面内,有径向合力 N_r 与环向合力 N_t 作用,由其平衡方程有[6]:

$$N_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rN_r) \tag{11}$$

由式(11) 变形有:

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[N_r+N_t] = 0 \tag{12}$$

也即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[N_r+N_t] = 0 \tag{13}$$

由式(6) 有:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N_r}{\mathrm{d}r} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}r^2}+\nu\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}-u\right)/r^2\right)\\ \frac{\mathrm{d}N_t}{\mathrm{d}r} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}r^2}+\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}-u\right)/r^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

将式(14) 代入式(13) 有:

$$\frac{Eh}{1-\nu}\left(\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}r^2}+\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}-u\right)/r^2\right) = 0 \tag{15}$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}-u = 0 \tag{16}$$

边界条件为:

$$r = R \text{时}, u = u_2; r = 0 \text{时}, u = 0 \tag{17}$$

引入无量纲参数:

$$x = \frac{r}{R}, U_2 = \frac{u_2}{R}, n_r = N_r/(Eh), n_t = /N_t/(Eh) \tag{18}$$

则式(16)无量纲化为:

$$x^2 \frac{dU^2}{dx^2} + x \frac{dU}{dx} - U = 0 \tag{19}$$

无量纲化的边界条件为:

$$x = 1 \text{时}, U = U_2; x = 0 \text{时}, U = 0 \tag{20}$$

微分方程(19)在边界条件(20)下解为:

$$U(x) = U_2 x \tag{21}$$

3 圆薄膜内的径向应力和环向应力分布

由式(6)可知:

$$\left.\begin{aligned} n_r &= \frac{1}{1-\nu^2}\left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r}\right] \\ n_t &= \frac{1}{1-\nu^2}\left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr}\right] \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

将式(21)代入式(22)得:

$$\left.\begin{aligned} n_r &= \frac{U_2}{(1-v)} \\ n_t &= \frac{U_2}{(1-v)} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

利用式(18)有量纲的应力为:

$$\left.\begin{aligned} N_r &= \frac{Eh}{1-v} * \frac{u_2}{R} \\ N_t &= \frac{Eh}{1-v} * \frac{u_2}{R} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

这样圆薄膜内获得了均匀的预张力,同时也可以看出,在外周边施加径向位移和施加对应的径向中面拉力的效果是相等的,即施加 u_2 的径向位移与施加 $N_r = \frac{Eh}{1-v} * \frac{u_2}{R}$ 的径向拉力效果等价. 式(24)应力合力均大于零,薄膜内无褶皱,即薄膜始终是张紧的[7],所得的解具有物理意义.

4 施加均匀预张力有限元算例验证

以上理论是施加预张力的关键,为了验证上述理论的正确性,建立有限元模型[8]进行了验证. 设薄膜的半径为 200 mm,厚度为 $h = 0.002$ mm,弹性模量 $E = 200$ GPa,泊松比为 $v = 0.24$,圆薄膜周边施加径向拉力 10 MPa.

由式(2)知,此时外周边径向位移 u_2 的理论解应为: $u_2 = \frac{(1-v)N_r R}{Eh} = \frac{(1-0.24)*10*200}{200*10^3*0.002} = 3.8$ mm. 这里建立代表整体的1/4圆薄膜的 ANSYS 模型,施加位移对称条件. 有限元模型的映射网格划分如图2,通过通用后处理程序查看圆薄膜内的径向位移图如图3,可知径向位移确实为3.8 mm,且为线性增大,与理论解一致;

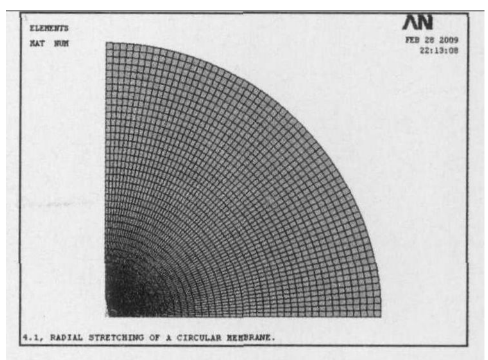

图2 有限元模型映射网格划分示意图

通过通用后处理程序查看圆薄膜内应力分布云如图 4;圆薄膜内的应力分布确实均匀,与理论解的结论一致.

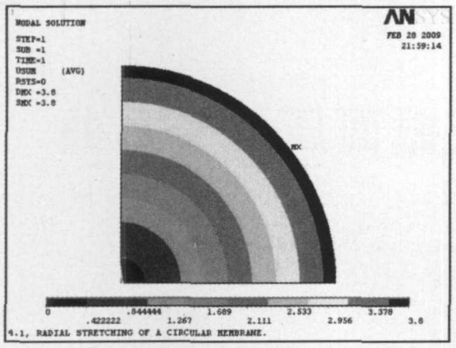

图 3　圆薄膜径向位移示意图

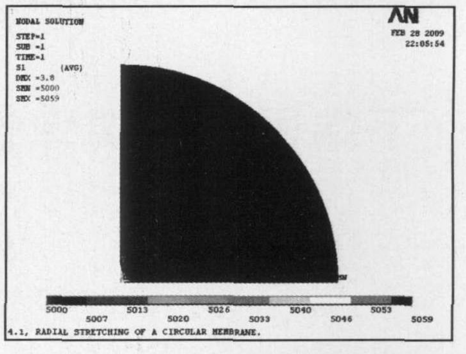

图 4　圆薄膜应力分布示意图

5　结　论

通过理论推导得出了沿周边径向张拉圆薄膜内的应力分布公式,并建立有限元分析验证了解析解的正确性. 结果表明:沿圆薄膜外边界均匀张拉一定位移后,薄膜内径向应力与环向应力相等,应力分布均匀且与张拉位移量成正比.

参考文献:

[1] 张化岚. 环状平膜片挠曲变形数学模型及其试验验证 [J]. 大连理工大学学报, 2005,45(3):366 - 369

[2] 李宝元,张化岚,李明东. 膜片式电—气转换器三个重要参数最佳值的确定 [J]. 仪器仪表与分析监测,2001(3):17 - 20

[3] 顾瓘琳. 在均布载荷作用下受有预加张力的弹性圆薄膜大挠度问题 [J]. 物理学报,1956,12(4):319 - 338

[4] 钱伟长. 轴对称圆薄板在大挠度情形下的一般理论 [J]. 物理学报,1954,10 (3): 295 - 311

[5] 徐芝纶. 弹性力学(下) [M]. 北京:高等教育出版社,1983

[6] 邹定祺,陈山林,忘玳瑜. 预张力圆板大挠度问题的幂级解 [J]. 重庆建筑工程学报,1985,6 (3): 38 - 52

[7] 靳从睿. 圆薄膜受中心集中力的大变形 [J]. 应用数学和力学,2008,29 (7):806 - 812

[8] 邢静忠,王永岗,陈晓霞,等. ANSYS7.0 分析实例与工程应用 [M]. 北京:机械工业出版社,2004

Stress distribution of circular membranes stretched radially at the outer edge

WU Jian - liang

(School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: Based on the stress - strain relationship and the deformation compatibility conditions, the basic equation of the circular membranes stretched the outer edge radially is established. The analytic solution is given through introducing the non - dimensional parameters to simplify the basic equations. The formulae of the stress distribution are obtained by theoretical derivation, and the conclusion shows that the radial stress and the circumferential stress is equal, and the stress values are the same at different locations, and the stress values are proportioned to the value of the radial displacement. The correctness of the analytic solution is certificated by the way of finite element simulation.

Key words: circular membranes; pre - stretched stress; radial stretch; analytic solution

责任编辑:李翠薇