第 37 卷第 3 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2020 年 6 月
Vol. 37 No. 3 J Chongqing Technol & Business Univ(Nat Sci Ed) Jun. 2020

doi:10. 16055/j. issn. 1672-058X. 2020. 0003. 007

含自回归误差项的函数型线性模型的参数估计

王 青 蓉
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:针对模型误差为独立同分布的假设并不总是合适的,讨论含有自回归误差项的函数型线性回归模型。考虑到函数型变量和斜率函数无限维的特点,首先进行函数型主成分分析,以函数型变量的协方差函数作谱分解得到的特征函数为基函数,分别以该组基对函数型变量和斜率函数进行逼近,将无限维的参数转化为有限维基函数系数;然后构造 $AR(1)$ 误差下函数型线性回归模型的参数估计,在一定条件下获得了与独立同分布场合下类似的结果;此外在均方误差的意义下,与忽略 $AR(1)$ 误差项所得估计量相比,取得更小的均方误差,推广了现有文献中的一些结论和性质。

关键词:函数型数据;函数主成分;自回归误差;收敛速度

中图分类号:O212 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2020)03-0047-05

0 引 言

作为函数型数据建模中最简洁、最重要的模型,函数型线性回归模型被广泛地应用于医学、经济学等学科领域。函数型线性模型通常具有以下形式:

$$Y = \int_{\mathfrak{I}} \gamma(t) X(t) \mathrm{d}t + \varepsilon, i = 1, 2, \cdots, n \qquad (1)$$

其中,响应变量 Y 是定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的实值随机变量,$\gamma(t)$ 是光滑且平方可积的斜率函数,也是未知的函数型参数,$\{X(t), t \in \mathfrak{I}\}$ 是 (Ω, F, P) 上的二阶矩有限的随机过程,样本轨道是定义在 $\mathfrak{I}$ 上的平方可积函数,ε 是随机误差项且独立于 X。一般地,假设 =[0,1]。

许多学者对函数型线性回归模型中斜率函数 $\gamma(t)$ 的估计问题进行了广泛的讨论。Cardot 等[1]使用函数型主成分分析方法估计斜率函数并得到了估计的渐近性质;王惠文等[2]采用极大似然估计法对模型中的斜率函数进行估计,通过数值模拟验证表明所提出方法不需要对误差分布进行假设,扩大适用范围;Hall 和 Horowitz[3]使用函数型主成分分析和最小二乘估计方法得到了斜率函数的估计,并证明了估计量的收敛速度;周雄斌[4]通过 B 样条基函数逼近方法将函数型线性回归模型转化为一般线性回归模型,然后用最小二乘的思想对模型进行了估计;贾宁华[5]针对模型中的函数型变量,利用和函数主成分方法,构建模型中未知参数的估计量,在一定的假设条件下得到参数估计量的渐进性质。以上文献在研究函数型线性回归模型中斜率函数估计渐近性质的时候,一般都假设误差项独立同分布,但在实际应用中模型误差的独立同分布假设并不总合适,特别是一些经济相关的数据经常表现出误差的相依性。而含相依误差的普通回归模型,目前已有大量成果。郭文雯和崔恒建[6]研究了带一阶自回归误差结构的单指标模型的参数估计

收稿日期:2019-12-26;**修回日期**:2020-01-20.

作者简介:王青蓉(1993—),女,四川巴中人,硕士研究生,从事统计理论与方法研究.

及渐近性质问题,利用局部多项式回归的方法对未知的联系函数进行估计,基于最大似然方法提出模型的参数估计方法;孙耀东等[7]研究相依误差下简单线性 EV 回归模型的参数估计问题,在一定条件下得到估计量的渐近正态性和相合性;杨旸[8]借用鞅差理论研究一阶自回归误差下线性回归模型最小二乘估计的相合性;Sophie 和 Serge[9]使用最小二乘核估计法研究误差为 $AR(d)$ 过程的函数型半参数回归模型中参数的估计,得到模型中参数估计量的渐近正态性。受上述文献的启发,讨论自回归误差下的函数型线性回归模型。

1 模型及参数估计

现假设有 n 组观测值$\{(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)\}$,则式(1)可以写成:

$$Y_i=\int_0^1\gamma(t)X_i(t)\,\mathrm{d}t+\varepsilon_i,i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

其中,ε_i 满足一阶自回归过程:

$$\varepsilon_1=e_1,\varepsilon_i=\rho\varepsilon_{i-1}+e_i,i=2,3,\cdots,n$$

其中$\{\varepsilon_i,i=1,2,\cdots,n\}$为误差项,$|\rho|<1$,$\{e_i\}$是均值为零,方差为 σ^2 的独立同分布序列。

记函数型协变量 $X_i(t)$ 的协方差函数为 G_X,假设 G_X 是定义在$[0,1]\times[0,1]$上的连续函数,利用 Mercer 定理可得:

$$G_X(s,t)=\mathrm{Cov}(X(s),X(t))=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(s)\varphi_i(t)$$

其中:(λ_i,φ_i)为协方差算子 $G_X(s,t)$的成对特征值和特征函数,$\lambda_1>\lambda_2>\cdots$,函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$具有连续性,满足:

$$\int_0^1\varphi_n(s)\varphi_m(s)\,\mathrm{d}s=\begin{cases}1 & n=m\\0 & n\neq m\end{cases}$$

对 $X_i(t)$ 和 $\gamma(t)$ 进行 Karhunen-Loéve 展开,得到:

$$X_i(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{ik}\varphi_k(t)$$

$$\gamma(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\varphi_k(t)$$

其中:$\xi_{ik}=\langle X_i(t),\varphi_k\rangle$;$\gamma_k=\langle\gamma(t),\varphi_k\rangle$;$k=1,2,\cdots$;$i=1,2,\cdots,n$;$\xi_{ik}$是不相关的随机变量且 $E\xi_{ik}=0$;$E\xi_{ik}^2=\lambda_k$ $\langle\cdot,\cdot\rangle$分别表示空间 $L^2[0,1]$上的内积。于是,函数线性模型式(2)表示为

$$Y_i=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{ik}\gamma_k+\varepsilon_i,i=1,2,\cdots,n$$

通常采用如下的截断模型:

$$Y_i=\sum_{k=1}^{K}\xi_{ik}\gamma_k+\varepsilon_i \tag{3}$$

其中,$K<n$ 为截断个数,一般选 K 使得 $X_i(t)$的方差由前 K 个函数主成分的累积贡献率达到 85% 或 90%,或者用 AIC 方法确定由 K 确定的特征值个数。然而在实际中,$\varphi_k(t)$是未知的,为了估计参数 $\gamma(t)$,必须先估计出 $\varphi_k(t)$。总体的特征函数一般很难得到,通过样本协方差函数的谱分解来估计特征函数$\{\varphi_k\}$。类似地,样本协方差函数:

$$\hat{G}_X(s,t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(s)X_i(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\lambda}_k\hat{\varphi}_k(s)\hat{\varphi}_k(t)$$

其中:$(\hat{\lambda}_k,\hat{\varphi}_k)$是$(\lambda_k,\varphi_k)$的估计,$\hat{\lambda}_1\geqslant\hat{\lambda}_2\geqslant\cdots\geqslant\hat{\lambda}_K\geqslant0=\lambda_{K+1}=\cdots$,$\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)^{\mathrm{T}}$,$\hat{\boldsymbol{\xi}}_K=\{\langle X_i(t),\hat{\varphi}_k\rangle\}_{k=1,2,\cdots,K}^{i=1,2,\cdots,n}$,$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}=(\gamma_1,\cdots,\gamma_K)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)^{\mathrm{T}}$,于是式(3)可表示为

$$Y_i=\sum_{k=1}^{K}\gamma_k\langle X_i,\hat{\varphi}_k\rangle+\varepsilon_i,i=1,2,\cdots,n$$

用矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{Y}=\hat{\boldsymbol{\xi}}_K\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4}$$

ε_i 满足自回归过程

$$\varepsilon_i=\rho\varepsilon_{i-1}+e_i \tag{5}$$

ε_i 为对应于第 i 组数据(X_i,Y_i)的误差项,同分布且满足一阶自回归过程,ρ 为不等于 0 的常数($|\rho|<1$)。假设 ρ 为已知的常数,参考 Sophie 和 Serge[9],$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon})=\sigma_\varepsilon^2\boldsymbol{\Phi}_n$,$\sigma_\varepsilon^2=\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon})$,

$$\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\rho & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1\end{pmatrix}$$

在式(4)两边同时乘以 $\boldsymbol{\Phi}_n^{-\frac{1}{2}}$，将上述模型作简单变换，可将其变换为式(6)：

$$\widetilde{\boldsymbol{Y}}=\tilde{\hat{\boldsymbol{\xi}}}_K\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}+\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{6}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{\Phi}_n^{-1/2}\boldsymbol{Y}$，$\tilde{\hat{\boldsymbol{\xi}}}_K=\boldsymbol{\Phi}_n^{-1/2}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K$，$\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{\Phi}_n^{-1/2}\boldsymbol{\varepsilon}$，这样 $E(\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}})=0$，$\mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}})=\sigma^2\boldsymbol{I}$，此时误差项满足经典假设的部分函数型线性模型的假设。由式(5)得 $\sigma_e^2=(1-\rho^2)\sigma_\varepsilon^2$。在式(6)中使用最小二乘法得到 $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$ 的估计，最小化目标函数：

$$Q_n(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})=(\widetilde{\boldsymbol{Y}}-\tilde{\hat{\boldsymbol{\xi}}}_K\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{Y}}-\tilde{\hat{\boldsymbol{\xi}}}_K\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})$$

可以得到 $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$ 的估计 $\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}$：

$$\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}=(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}\boldsymbol{Y}$$

$$E(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}})=E[(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{T}\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}+\boldsymbol{\varepsilon})]=$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}+(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon})=\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$$

即 $\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$ 的无偏估计，且估计的误差协方差阵为

$$E(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}-\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}-\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})^{\mathrm{T}}=$$

$$E[(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}]=$$

$$\frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}$$

$$E(\varepsilon^2)=\frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}$$

进一步，令 $\hat{G}_{YX}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_iX_i(t)$，则 $\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}$ 存在如下等价形式：

$$\hat{\widetilde{\gamma}}_k=\lambda\ \hat{\widetilde{\gamma}}_k^{-1}<G\ \hat{\widetilde{\gamma}}_{\tilde{Y}\tilde{X}}(t),\varphi\ \hat{\widetilde{\gamma}}_k>,k=1,2,\cdots,K$$

其中 $<\hat{G}_{\tilde{Y}\tilde{X}},\hat{\varphi}_k>=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Y}_i<\widetilde{X}_i(t),\hat{\varphi}_k>$，相应的，$\boldsymbol{\gamma}(\cdot)$ 的估计为

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}(t)=\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}_k\hat{\varphi}_k(t)$$

$$\hat{\widetilde{\sigma}}^2=\frac{1}{n}(\widetilde{\boldsymbol{Y}}-\tilde{\hat{\boldsymbol{\xi}}}_K\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}})\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{Y}}-\tilde{\hat{\boldsymbol{\xi}}}_K\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}})^{\mathrm{T}}$$

如果忽略掉 $AR(1)$ 误差，直接最小二乘估计参数 $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}=(\gamma_1,\cdots,\gamma_K)^{\mathrm{T}}$，并记为 $\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{ls}$，则

$$\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{ls}=(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$$

于是，

$$E(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{ls})=E[(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}+\boldsymbol{\varepsilon})]=$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}+(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon})=\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$$

即 $\hat{\widetilde{\gamma}}_{ls}$ 也是 $\widetilde{\gamma}$ 的无偏估计，且估计的协方差误差阵为

$$E(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{ls}-\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{ls}-\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})^{\mathrm{T}}=$$

$$E[(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}]=$$

$$\frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}((\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_n^{-1}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K(\hat{\boldsymbol{\xi}}_K^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\xi}}_K)^{-1})$$

为了比较两种估计的优劣，这里采用估计的均方误差准则：

$$\mathrm{MSE}(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{ls})-\mathrm{MSE}(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}})=$$

$$E(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{ls}-\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{ls}-\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})^{\mathrm{T}}-E(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}-\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}-\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})^{\mathrm{T}}=$$

$$\mathrm{tr}(\mathrm{cov}(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{ls}))-\mathrm{tr}(\mathrm{cov}(\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}))\geqslant 0$$

因此 $\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}$ 优于 $\hat{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{ls}$。

2　基本假设与估计的渐近性质

2.1　基本假设及引理

为了得到相关理论结果，参照文献[3]的假设，有

假设 1　$\widetilde{\boldsymbol{X}}_i(\boldsymbol{t})$ 为有限四阶矩，即 $\int_0^1 E(\widetilde{\boldsymbol{X}}_i)^4<\infty$。

假设 2　存在常数 c 和 $a>1$，对于特征值 λ_k，满足 $\lambda_k-\lambda_{k+1}\geqslant c^{-1}k^{-a-1}$，$c^{-1}k^{-a}\leqslant\lambda_k\leqslant ck^{-a}$，$E[\tilde{\hat{\xi}}_k^4]\leqslant C\lambda_k^2$，其中 $\{\lambda_k\}_{k=1,2,\cdots}$ 是 $\boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{t})$ 的协方差函数的特征值。

假设 3　存在常数 $b>a/2+1$，满足 $|\gamma_k|\leqslant ck^{-b}$。

假设 4　对于基函数的截断个数 K，有 $K\sim n^{1/(a+2b)}$。

假设 5　随机误差项 ε_i 是严平稳序列，均值为零，有限非零方差。

假设 1、假设 4 是函数线性回归模型常用的基本条件；假设 2 可防止相邻特征值之间的间隔过小，

还意味着下界 λ_k 的速度不小于 k^{-s},假设 5 是自回归误差常见的假设。

2.2 定理证明

定理 1 若假设 1—假设 5 成立,则当 $n\to\infty$ 时,有

$$\|\hat{\boldsymbol{\gamma}}-\boldsymbol{\gamma}\|=O_p(n^{-(2b-1)/(a+2b)})$$

证明 首先定义如下的记号,对任意的实数 r 和正整数 K,根据 Shin[11] 中的记号,有

$$t_r(K)=\begin{cases}1, & 若\ r<-1\\ \log K, & 若\ r=-1\\ K^{r+1}, & 若\ r>-1\end{cases}$$

通过 Cauchy-Buniakowsky-Schwarz 不等式可以得到下面的式子

$$\|\hat{\boldsymbol{\gamma}}-\boldsymbol{\gamma}\|^2=\Big\|\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}_k\hat{\varphi}_k-\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\varphi_k\Big\|^2=$$

$$\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}_k\hat{\varphi}_k-\sum_{k=1}^{K}\gamma_k\varphi_k\Big)-\sum_{k=K+1}^{\infty}\gamma_k\varphi_k\Big\|^2\leqslant$$

$$2\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}_k\hat{\varphi}_k-\sum_{k=1}^{K}\gamma_k\hat{\varphi}_k\Big)+\Big(\sum_{k=1}^{K}\gamma_k\hat{\varphi}_k-\sum_{k=1}^{K}\gamma_k\varphi_k\Big)\Big\|^2+$$

$$2\sum_{k=K+1}^{\infty}\gamma_k^2\leqslant4\Big\|\sum_{k=1}^{K}(\hat{\gamma}_k-\gamma_k)\hat{\varphi}_k\Big\|^2+4\Big\|\sum_{k=1}^{K}(\hat{\varphi}_k-\varphi_k)\gamma_k\Big\|^2+$$

$$2\sum_{k=K+1}^{\infty}\gamma_k^2\leqslant4\sum_{k=1}^{K}(\hat{\gamma}_k-\gamma_k)^2+8K\sum_{k=1}^{K}\gamma_k^2\|\hat{\varphi}_k-\varphi_k\|^2+2\sum_{k=K+1}^{\infty}\gamma_k^2$$

对于第三项,利用文献[3]和文献[11]中定理的证明思想以及假设 2—假设 4,有

$$\sum_{k=K+1}^{\infty}\gamma_k^2\leqslant c\sum_{k=K+1}^{\infty}k^{-2b}=O(n^{-(2b-1)/(a+2b)})$$

对于第二项,利用 $\|\hat{\varphi}_k-\varphi_k\|^2=O_p(n^{-1}k^2)$,于是

$$\Big\|\sum_{k=1}^{K}(\hat{\varphi}_k-\varphi_k)\gamma_k\Big\|^2\leqslant K\sum_{k=1}^{K}\|\hat{\varphi}_k-\varphi_k\|^2\gamma_k^2\leqslant$$

$$O_p\Big(\frac{K}{n}t_{-2b+2}(K)\Big)=O_p\Big(\frac{K}{n}\Big)=O_p(n^{-(2b-1)/(a+2b)})$$

对于最后一部分,由文献[11]中定理 3.2 的证明可以得出:

$$\Big\|\sum_{k=1}^{K}(\hat{\gamma}_k-\gamma_k)\hat{\varphi}_k\Big\|^2\leqslant\sum_{k=1}^{K}(\hat{\gamma}_k-\gamma_k)^2=$$

$$O_p(n^{-(2b-1)/(a+2b)})$$

所以,$\|\hat{\boldsymbol{\gamma}}-\boldsymbol{\gamma}\|^2=O_p(n^{-(2b-1)/(a+2b)})$。

3 结束语

讨论了含自回归误差项的函数型线性模型,考虑到函数型变量与斜率函数无限维的性质,首先利用展开对函数型变量和斜率函数进行逼近,将具有自回归误差的函数型线性模型,转化为相对应的普通线性回归模型,然后构造 $AR(1)$ 误差下的函数型线性回归模型的参数估计,在一定条件下获得了与独立同分布场合下类似的结果;此外在均方误差的意义下,与忽略 $AR(1)$ 误差项所得估计量相比,取得更小的均方误差,推广了现有文献中的一些结论和性质。

参考文献(References):

[1] CARDOT, HERVÉ, FERRATY, et al. Spline Estimators for the Functional Linear Model[J]. Statistica Sinica, 2003, 13(3):571—591

[2] 王惠文,黄乐乐,王思洋. 基于函数型数据的广义线性回归模型[J]. 北京航空航天大学学报,2016,42(1):8—12

WANG H W, HUANG L L, WANG S Y. Generalized Linear Regression Model Based on Functional Data[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2016,42(1):8—12(in Chinese)

[3] HALL P, HOROWITZ J L. Methodology and Convergence Rates for Functional Linear Regression[J]. The Annals of Statistics, 2007, 35(1):70—91

[4] 周雄斌. 函数线性回归模型中的变量选择问题研究[D]. 重庆:重庆大学,2017

ZHOU X B. Study on Variable Selection in Function Linear Regression Model[D]. Chongqing: Chongqing University, 2017(in Chinese)

[5] 贾宁华. 函数型线性回归模型若干问题研究[D]. 合肥:合肥工业大学,2012

JIA N H. Some Problems of Functional Linear Regression Model[D]. HeFei: HeFei University of Technology, 2012(in Chinese)

[6] 郭文雯,崔恒建. 带自回归过程的单指标模型的参数估计及其渐近性质[J]. 系统科学与数学,2015,35

(12):1463—1478

GUO W W,CUI H J. Parameter Estimation and Asymptotic Properties of Single Index Model with Autoregressive Process[J]. Systems Science and Mathematics, 2015,35(12):1463—1478(in Chinese)

[7] 孙耀东,赵志文,徐宝. 相依误差下简单线性 EV 回归模型的参数估计[J]. 河南大学学报(自然科学版),2014,44(2):146—150

SUN Y D,ZHAO Z W,XU B. Parameter Estimation of Simple Linear EV Regression Model with Dependent Errors[J]. Journal of Henan University(Natural Science Edition),2014,44(2):146—150(in Chinese)

[8] 杨旸. 相依误差下线性回归模型最小二乘估计的相合性[J]. 统计与策,2014(6):11—13

YANG Y. Consistency of Least Squares Estimators in Linear Regression Models with Dependent Errors[J]. Statistics and Decision, 2014(6):11—13(in Chinese)

[9] SOPHZE D N, SERGE S. Functional Semiparametric Partially Linear Model with Autoregressive Errors[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2010, 101(2): 307—315

[10] BROCKWELL P J,DAVIS R A. Time Series:Theory and Methods[M]. New YorK:Springer-Verlag,1991

[11] SHIN H . Partial Functional Linear Regression[J]. Journal of Statistical Planning & Inference, 2009, 139(10):3405—3418

Parameter Estimation of Functional Linear Models with Autoregressive Error Term

WANG Qing-rong

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: According to the fact that it is not always appropriate to assume that the model error is an independent isomorphic distribution, this paper discusses functional linear regression model with autoregressive error term. Considering the infinite dimensionality of functional variables and slope function, at first, this paper makes functional principal component analysis by taking the covariance function of functional variables as spectrum decomposition to obtain the basis function of characteristic function, then approximates the functional variables and the slope function by using this group basis respectively, so the parameters of infinite dimension are converted into basis function coefficients of finite dimension, and then constructs the parameter estimation of functional linear regression model with autoregressive error. Under certain condition, the result similar to independent isomorphic distribution is obtained. In addition, in the sense of mean square error, compared with the estimator of first-order autoregressive error term, a smaller mean square error is received, which extends some conclusions and properties in the existing literatures.

Key words: functional data; functional principal component; autoregressive error; convergence speed

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

王青蓉. 含自回归误差项的函数型线性模型的参数估计[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(3):47—51

WANG Q R. Parameter Estimation of Functional Linear Models with Autoregressive Error Term[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2020,37(3):47—51