doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0002.001

一类微分型 Gronwall 不等式的应用及推广*

聂东明, 马艳丽, 潘娜娜
(安徽新华学院 通识教育部,合肥 230088)

摘　要:常见的 Gronwall 不等式分为积分形式与微分形式。首先,对于常见的积分型 Gronwall 不等式,旨在给予一种新的证明方法,不同于以往不等式两端乘以指数函数的证明方法,而是应用最基本的积分公式加以证明,并用该不等式证明了一阶常微分方程解的唯一性;其次,旨在推广微分型 Gronwall 不等式,应用基本微分型不等式证明了波动方程解的唯一性及热传导方程的解能量估计;再者,应用变量代换、求导公式及基本的微分型 Gronwall 不等式,把一阶微分型的 Gronwall 不等式推广为两种情形:右端控制项由一次方升到 $\alpha(\alpha>0)$ 次方;把一阶微分型的 Gronwall 不等式推广到二阶微分型的 Gronwall 不等式,并得到与一阶相似的结论。

关键词:Gronwall 不等式;微分方程;应用;推广
中图分类号:O175.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2020)02-0001-05

1　积分型 Gronwall 不等式及应用

引理 1(Gronwall 不等式)　设 $f(t)$ 是区间 $J=[a,a+T]$ 上的连续非负函数,且

$$0 \leqslant u(t) \leqslant \int_a^t [\alpha+\beta u(s)]\mathrm{d}s,\ \forall t \in [a,a+T]$$

其中 α 与 β 为非负常数,则

$$0\leqslant u(t)\leqslant \alpha T\mathrm{e}^{\beta T},t\in J \tag{1}$$

式(1)是 1919 年 Gronwall[1] 提出的,在 1943 年,Bellman[2] 把该式推广为下面的引理。

引理 2 (Gronwall-Bellman 不等式)　设 K 为非负常数,$u(t)$ 和 $g(t)$ 都是区间 $[a,b]$ 上的连续非负函数,且满足不等式:

$$u(t) \leqslant K+\int_a^t u(s)g(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in [a,b] \tag{2}$$

则有

$$u(t) \leqslant K\exp(\int_a^t g(s)\mathrm{d}s) \tag{3}$$

证明　设 $K>0$,则由式(2)得

$$\frac{u(t)g(t)}{K+\int_a^t u(s)g(s)\mathrm{d}s} \leqslant g(t)$$

在 $[a,t]$ 上积分,有

$$\ln(K+\int_a^t u(s)g(s)\mathrm{d}s) - \ln K \leqslant \int_a^t g(s)\mathrm{d}s$$

则有

$$K+\int_a^t u(s)g(s)\mathrm{d}s \leqslant K\exp\int_a^t g(s)\mathrm{d}s$$

又由式(2),有

$$u(t) \leqslant K\exp(\int_a^t g(s)\mathrm{d}s)$$

引理 2 得证。

Bellman 以不等式(3)为工具, 对线性常微分方程组与高阶微分方程解的稳定性,二阶线性微分方程解的有界性、渐进性进行了开创性的研究,因此式(3)也被称为 Gronwall-Bellman 不等式。

这两个不等式是最经典的两个不等式,它们在证明微分方程解的存在性、唯一性等方面应用很广

收稿日期:2019-06-17;**修回日期**:2019-09-02.
* **基金项目**:安徽省教育厅自然科学研究项目(KJ2017A622,KJ2019A0875);安徽新华学院教学团队项目(2017JXTDX05);安徽新华学院科研项目(2019ZR005).
作者简介:聂东明(1981—),女,河南南阳人,副教授,硕士研究生,从事应用数学研究.

泛,如可以证明一阶 Cauchy 微分方程解的唯一性。

命题 1 一阶微分方程$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$的 Cauchy 初值问题$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$,若函数$f(t,x)$在矩形区域

$$R=\{(t,x)\mid |t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b\}$$

满足:

$f(t,x)$在 $\mathbf{R}$ 上连续;函数$f(t,x)$在 $\mathbf{R}$ 上关于 x 满足 Lipschitz 条件,即存在常数 $L>0$,使得对所有$(t,x_1),(t,x_2)\in\mathbf{R}$,都有$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$成立,则初值问题在区间$|t-t_0|\leqslant h$上存在唯一解,其中$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$,$M=\max\limits_{(t,x)\in\mathbf{R}}|f(t,x)|$。

证明 设$\varphi_1(t)$,$\varphi_2(t)$都是微分方程的解,则

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|=\left|\int_{t_0}^{t}[f(\varphi_1)-f(\varphi_2)\mathrm{d}t]\right|\leqslant\int_{t_0}^{t}L|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\mathrm{d}x$$

由 Gronwall 不等式,令 $K=0$,$g(s)=L$,$f(s)=|\varphi_1-\varphi_2|$,则

$$|\varphi_1-\varphi_2|\leqslant 0,\exp\left(\int_a^t L\mathrm{d}s\right)=0$$

故$\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$。

2 微分型 Gronwall 不等式及应用

由于 Bellman-Gronwall 不等式的广泛应用,为了解决更多类型的微分方程问题,如能量泛函估计、解的精确控制等,很多学者对该不等式进行改进推广。李文荣[3]概述了该类不等式的发展,同时还有很多学者对 Gronwall 不等式加以推广,如文献[5—10]。考虑以下微分形式的 Gronwall 不等式。

定理 1 设非负函数$u(t)$在区间$[0,T]$上连续可微,$u(0)=0$,且

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant Ku(t)+g(t),\ \forall t\in[0,T] \tag{4}$$

其中常数 $K>0$,$g(t)$为在$[0,T]$上单调不减的非负可积函数,则

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant \mathrm{e}^{Kt}g(t),\ \forall t\in[0,T] \tag{5}$$

$$u(t)\leqslant\frac{\mathrm{e}^{Kt}-1}{K}g(t),\ \forall t\in[0,T] \tag{6}$$

证明 在式(4)的两端乘以 e^{-Kt},则

$$\mathrm{e}^{-Kt}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant Ku(t)\mathrm{e}^{-Kt}+g(t)\mathrm{e}^{-Kt}$$

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{e}^{-Kt}u(t)]}{\mathrm{d}t}\leqslant\mathrm{e}^{-Kt}g(t)$$

在$[0,t]$上积分,有

$$\mathrm{e}^{-Kt}u(t)\leqslant\int_0^t\mathrm{e}^{-Ks}g(s)\mathrm{d}s\leqslant g(t)\frac{1-\mathrm{e}^{-Kt}}{K}$$

则$u(t)\leqslant g(t)\frac{\mathrm{e}^{Kt}-1}{K}$,式(6)得证。

把式(6)代入式(4),可得到

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\mathrm{e}^{Kt}g(t),\ \forall t\in[0,T]$$

式(5)得证。

定理 1 常用于微分方程解能量估计与唯一性的证明上,应用在混合型波传导方程[4]上,有

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f,x\in\Omega_T\\ u(x,0)=\varphi(x),0<x<l\\ u(0,t)=u(l,t)=0,0<t\leqslant T\end{cases} \tag{7}$$

其中$\Omega_T=\{(x,t)\mid 0<x<l,0<t\leqslant T\}$。

命题 2 设 $u\in C^1(\overline{\Omega_T})\cap C^{2,1}(\Omega_T)$是式(7)的解,则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x+2a^2\int_0^T\mathrm{d}t\int_0^l u_x^2(x,t)\mathrm{d}x\leqslant M\left(\int_0^l\varphi^2(x)\mathrm{d}x+\int_0^T\mathrm{d}t\int_0^l f^2(x,t)\mathrm{d}x\right) \tag{8}$$

证明 在式(7)两端乘以 u 并在 Ω_T 上积分,则

$$\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^l\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x-a^2\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^l uu_{xx}(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^l uf(x,t)\mathrm{d}x \tag{9}$$

$$左边=\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^l\varphi^2(x)\mathrm{d}x+a^2\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^l u_x^2(x,t)\mathrm{d}x$$

$$右边\leqslant\frac{1}{2}\int_0^T\mathrm{d}t\int_0^l u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^l f^2\mathrm{d}x$$

则式(9)可化为

$$\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x+2a^2\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^l u_x^2(x,t)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^l u^2\mathrm{d}x+\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^l f^2\mathrm{d}x+\int_0^l\varphi^2(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$

令$F(t)=\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^l u^2\mathrm{d}x$,$G(t)=\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^l f^2\mathrm{d}x+\int_0^l\varphi^2(x)\mathrm{d}x$,则由式(10)可得

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant F(t)+G(t)$$

由 Gonwall 不等式,存在常数 $M>0$,可得

$$F(t)\leqslant(\mathrm{e}^t-1)G(t)\leqslant MG(t)$$

则由式(10)可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l u^2(x,t)\,\mathrm{d}x+2a^2\int_0^T\mathrm{d}t\int_0^l u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\leqslant M\left(\int_0^l\varphi^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^T\mathrm{d}t\int_0^l f^2(x,t)\,\mathrm{d}x\right)$$

命题 2 得证。

把命题 2 应用到二阶线性波动方程,可以验证解是唯一的。

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}+cu=f(x,t),-\infty<x<+\infty,t>0\\ u(x,0)=\varphi(x),-\infty<x<+\infty\\ u_t(x,0)=\psi(x),-\infty<x<+\infty\end{cases}\tag{11}$$

命题 3　设 $u(x,t)$ 是式(11)的解,证明方程的解是唯一的。

证明　根据波动方程解已知区间,设 $\Omega=\{(x,t)\,|\,x_0-a(t_0-t)<x<x_0+a(t_0-t),t<t_0\}$,$K_T=\Omega\cap\{0<t<T\}$,$\Omega_T=\Omega\cap\{t=T\}$,在波动方程两端乘以 u_t,并在 K_T 上积分,则

$$\iint_{K_T}(u_tu_{tt}-a^2u_tu_{xx}+cu_tu)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{K_T}u_tf(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{12}$$

又因为 $u_tu_{tt}=\frac{1}{2}(u_t^2)_t$,$u_tu_{xx}=(u_tu_x)_x-\frac{1}{2}(u_x^2)_t$,$uu_t=\frac{1}{2}(u^2)_t$,则式(12)化为

$$\iint_{K_T}\left[\frac{1}{2}(u_t^2+a^2u_x^2+cu^2)_t-a^2(u_tu_x)_x\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{K_T}u_tf(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{13}$$

由 Green 公式,式(13)化为

$$-\oint_{\partial K_T}\frac{1}{2}(u_t^2+a^2u_x^2+cu^2)\,\mathrm{d}x+a^2(u_tu_x)\,\mathrm{d}t=\iint_{K_T}u_tf(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{14}$$

由曲线积分公式及初值条件,式(14)有

$$\text{左端}=\int_{\Omega_T}\frac{1}{2}(u_t^2+a^2u_x^2+cu^2)\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega_0}\frac{1}{2}(\psi^2+a^2\varphi_x^2+c\varphi^2)\,\mathrm{d}x+\int_{\partial K_{T_1}+\partial K_{T_2}}\frac{1}{2}(u_t^2+a^2u_x^2+cu^2)\,\mathrm{d}x+a^2u_tu_x\mathrm{d}t$$

又因为

$$\int_{\partial K_{T_1}+\partial K_{T_2}}\frac{1}{2}(u_t^2+a^2u_x^2+cu^2)\,\mathrm{d}x+a^2u_tu_x\mathrm{d}t=\int_{\partial K_{T_1}}\frac{a}{2}(u_t^2+a^2u_x^2+cu^2+2au_tu_x)\,\mathrm{d}t+\int_{\partial K_{T_2}}\frac{a}{2}(2au_tu_x-u_t^2-a^2u_x^2-cu^2)\,\mathrm{d}t=$$

$$\int_{\partial K_{T_1}}\frac{a}{2}(u_t+au_x)^2+cu^2\mathrm{d}t+\int_{\partial K_{T_2}}\frac{a}{2}(u_t-au_x)^2+cu^2\mathrm{d}t>0$$

右端利用 Schwarz 不等式,则式(14)有

$$\int_{\Omega_T}(u_t^2+a^2u_x^2+cu^2)\,\mathrm{d}x<\int_{\Omega_0}(\psi^2+a^2\varphi_x^2+c\varphi^2)\,\mathrm{d}x+\iint_{K_T}u_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{K_T}f^2(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{15}$$

令 $G(t)=\int_{K_t}(u_t^2+a^2u_x^2+cu^2)\,\mathrm{d}x$,则式(15)满足 $\frac{\mathrm{d}G(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant G(t)+F(t)$,其中

$$F(t)=\int_{\Omega_0}(\psi^2+a^2\varphi_x^2+c\varphi^2)\,\mathrm{d}x+\iint_{K_T}f^2(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

由定理 1 知 $G(t)\leqslant(\mathrm{e}^t-1)F(t)$,当 $\varphi=\psi=f=0$ 时,则 $u\equiv0$,方程的解唯一,命题 3 得证。

3　微分型 Gronwall 不等式的推广

定理 2　设 f,g 在 $I=[0,+\infty)$ 上连续,$u(t)$ 在 $I=[0,+\infty)$ 上有连续导数,$u(t)>0$,有

1) 若 $\alpha<1$,

$$u'(t)\leqslant f(t)u(t)+g(t)u^\alpha(t)\tag{16}$$

则有

$$u(t)\leqslant\mathrm{e}^{\int_0^tf(\xi)\mathrm{d}\xi}\times\left[u_0^\beta+\beta\int_0^tg(s)\exp\beta\int_s^tf(\xi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{\beta}}\tag{17}$$

其中 $u_0=f(0)$,$\beta=1-\alpha$。

2) 若 $\alpha=1$,且 $u'(t)\leqslant f(t)u(t)$,则

$$u(t)\leqslant u(0)\exp\int_0^tf(\xi)\,\mathrm{d}\xi\tag{18}$$

3) 若 $\alpha>1$,且 $u'(t)\geqslant f(t)u(t)+g(t)u^\alpha(t)$,则

$$u(t)\leqslant\mathrm{e}^{\int_0^tf(\xi)\mathrm{d}\xi}\times\left[u_0^\beta+\beta\int_0^tg(s)\exp\beta\int_s^tf(\xi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{\beta}}\tag{19}$$

证明　1) 在式(16)两端乘以 $u^{-\alpha}$,则

$$u^{-\alpha}u'\leqslant f(t)u^{1-\alpha}+g(t)$$

令 $v(t)=[u(t)]^{1-\alpha}$,设 $\beta>0$,则

$$v'(t)=(1-\alpha)[u(t)]^{-\alpha}u'(t)\tag{20}$$

在式(20)两端乘以 $\mathrm{e}^{-\beta\int_0^tf(\xi)\mathrm{d}\xi}$,有

$$v'(t)\mathrm{e}^{-\beta\int_0^tf(\xi)\mathrm{d}\xi}\leqslant\beta f(t)v(t)\mathrm{e}^{-\beta\int_0^tf(\xi)\mathrm{d}\xi}+\mathrm{e}^{-\beta\int_0^tf(\xi)\mathrm{d}\xi}\beta g(t)\tag{21}$$

由于

$$[f(t)v(t)\mathrm{e}^{-\beta\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi}]'=$$

$$v'(t)\mathrm{e}^{-\beta\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi}-\beta f(t)v(t)\mathrm{e}^{-\beta\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi}$$

则式(21)化为

$$[v(t)\mathrm{e}^{-\beta\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi}]'\leqslant \mathrm{e}^{-\beta\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi}\beta g(t) \quad (22)$$

式(22)在$[0,t]$上积分得

$$v(t)\mathrm{e}^{-\beta\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi}-v(0)\leqslant \beta\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta\int_0^s f(\xi)\mathrm{d}\xi}g(s)\mathrm{d}s$$

也即

$$v(t)\mathrm{e}^{-\beta\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi}-v(0)\leqslant \beta\int_0^t g(s)\mathrm{e}^{\beta\int_s^0 f(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s$$

化简后得

$$v(t)\leqslant \mathrm{e}^{\beta\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi}\left[v(0)+\beta\int_0^t g(s)\mathrm{e}^{\beta\int_s^0 f(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s\right]$$

由于

$$v(t)=[u(t)]^{1-\alpha},\beta=1-\alpha,u(0)=u_0,\text{则}$$

$$u(t)\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi}\left[u_0^\beta+\beta\int_0^t g(s)\exp\beta\int_s^t f(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

式(17)得证。

2) 若$u'(t)\leqslant f(t)u(t)$,两端同时除以$u(t)$,得$\dfrac{u'(t)}{u(t)}\leqslant f(t)$,在$[0,t]$上积分易得

$$u(t)\leqslant u(0)\exp\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

式(18)得证。

3) 类似于 1) 的方法,在不等式两端乘以$u^{-\alpha}$,有

$$u^{-\alpha}u'\geqslant f(t)u^{1-\alpha}+g(t)$$

即$\dfrac{1}{(1-\alpha)}\dfrac{\mathrm{d}(u^{1-\alpha})}{\mathrm{d}t}\geqslant f(t)u^{1-\alpha}+g(t)$,当$\alpha>1$时,$\beta=1-\alpha<0$,则

$$\frac{(\mathrm{d}u^{1-\alpha})}{\mathrm{d}t}\leqslant(1-\alpha)[f(t)u^{1-\alpha}+g(t)]$$

令$v(t)=[u(t)]^{1-\alpha}$,则

$$v'(t)\leqslant\beta[f(t)v(t)+g(t)]$$

与式(21)相同的方法即可得式(19),定理 2 得证。

对于微分型的 Gronwall 不等式,还可以推广到二阶形式的不等式。

定理 3 设非负函数$u(t)$在区间$[0,T]$上连续可微,且$u(0)=0$,$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续,K_1,K_2,K_3为正数,且

$$u''(t)\leqslant K_1u'(t)+K_2g(t)+K_3,\ \forall t\in[0,T] \quad (23)$$

则存在非负常数K,有

$$u(t)\leqslant\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{K\xi}-1}{K}(K_2g(\xi)+K_3)\mathrm{d}\xi$$

证明 由于$K_1>0$,则一定存在常数$a>0$,使得$K_1-a>0$,在式(23)两端同时乘以e^{-at},有

$$u''(t)\mathrm{e}^{-at}\leqslant K_1u'(t)\mathrm{e}^{-at}+K_2\mathrm{e}^{-at}g(t)+K_3\mathrm{e}^{-at}$$

$$u''(t)\mathrm{e}^{-at}-au'(t)\mathrm{e}^{-at}\leqslant$$

$$(K_1-a)u'(t)\mathrm{e}^{-at}+K_2\mathrm{e}^{-at}g(t)+K_3\mathrm{e}^{-at}$$

也即

$$\frac{\mathrm{d}(u'(t)\mathrm{e}^{-at})}{\mathrm{d}t}\leqslant(K_1-a)u'(t)\mathrm{e}^{-at}+K_2\mathrm{e}^{-at}g(t)+K_3\mathrm{e}^{-at}$$

令$F(t)=\mathrm{e}^{-at}u'(t)$,$G(t)=K_2\mathrm{e}^{-at}g(t)+K_3\mathrm{e}^{-at}$,$K=K_1-a$,则$\dfrac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant KF(t)+G(t)$,且$F(0)=0$,显然满足定理 1 的条件,则

$$F(t)\leqslant\frac{\mathrm{e}^{Kt}-1}{K}G(t)$$

又因为$F(t)=\mathrm{e}^{-at}u'(t)$,$G(t)=K_2\mathrm{e}^{-at}g(t)+K_3\mathrm{e}^{-at}$,$K=K_1-a$,则

$$\mathrm{e}^{-at}u'(t)\leqslant\frac{\mathrm{e}^{Kt}-1}{K}(K_2\mathrm{e}^{-at}g(t)+K_3\mathrm{e}^{-at})$$

$$u'(t)\leqslant\frac{\mathrm{e}^{Kt}-1}{K}(K_2g(t)+K_3)$$

在$[0,t]$上积分,有

$$u(t)\leqslant\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{K\xi}-1}{K}(K_2g(\xi)+K_3)\mathrm{d}\xi$$

定理 3 得证。

4 结束语

定理 2 和定理 3 主要是把一阶微分型不等式右端的控制项$u(x)$由一次方推广到α次方,并得到类似的估计;同时,把一阶的微分型不等式推广到二阶微分的情形,并得到类似的估计,在后期可以继续探究更高阶的微分型不等式。

参考文献(References):

[1] GRONWALL T H. Note on the Derivatives with Respect to a Parameter of the Solutions of a System of Differential Equations[J]. Ann Math,1919,20(4):292—296

[2] BELLMAN J R. The Stability of Solutions of Linear Differential Equations[J]. Duke Math J, 1943(10): 643—647

[3] 李文荣. 分析中的问题研究[M]. 北京:科学出版社,2016

LI W R. Research on Problems in Analysis [M]. Beijing: Science Press, 2016(in Chinese)

[4] 姜礼尚,陈亚浙. 数学物理方程讲义[M]. 北京:高等教育出版社,2018

JIANG L S, CHEN Y Z. Lectures on Mathematical Physics Equations [M]. Beijing: Higher Education Press,2018(in Chinese)

[5] 李维国. 一类二阶线性 Gronwall 不等式及其应用[J]. 工程数学学报,2000,17(4): 131—134
LI W G. One Class of Second Order Linear Gronwall Inequalities and Their Applications [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2000, 17 (4): 131—134 (in Chinese)

[6] 王世祥,杨丽贤. 关于 Gronwall 不等式的一个注记[J]. 长春大学学报,2008,10(2):34—42
WANG S X, YANG L X. A Note of Gronwall Inequality[J]. Journal of Changchun University, 2008,10(2):34—42 (in Chinese)

[7] 赵云. 关于 Gronwall 不等式的一个注记[J]. 高等数学研究, 2011,14(4):17—18
ZHAO Y. A Note on Gronwall Inequality [J]. Studies in College Mathematics, 2011,14(4):17—18(in Chinese)

[8] 许佳. Gronwall 不等式的推广及其在分数阶微分方程中的应用[J]. 西华大学学报(自然科学版),2012,31(5):62—64
XU J. A Generalized Gronwall Inequality and Its Application in a Fractional Differential Equation [J]. Journal of Xihua University(Natural Science Edition), 2012,31(5):62—64(in Chinese)

[9] 严勇. 一类带脉冲项的 Gronwall-Bellman 型积分不等式的推广及应用[J]. 四川师范大学学报(自然科学学版),2013,36(4):603—609
YAN Y. A Generalized Gronwall-Bellman Type Impulsive Integral Inequality and Its Applications [J]. Journal of Sichuan Normal University(Natural Science Edition), 2013,36(4):603—609(in Chinese)

[10] LUO D, LIU Y, WANG C. Several Notations of Gronwall Inequality of Vector Functions [J]. Advances in Intelligent Systems Research,2017,150:1—5

Application and Generalization of a Class of Differential Gronwall Inequalities

NIE Dong-ming, MA Yan-li, PAN Na-na

(Department of Common Courses, Anhui Xinhua University, Hefei 230088, China)

Abstract: The common Gronwall inequalities are divided into integral and differential forms. Firstly, for the common integral Gronwall inequalities, the purpose is to give a new proof method, which is different from the proof method of exponential function multiplied by the two ends of former inequalities, but is proved by using the basic integral formula, and the uniqueness of the solutions of the ordinary differential equations of the first order type is proved by using this inequality. Secondly, the purpose is to generalize differential Gronwall inequality, and the uniqueness of the solutions of wave equation and the estimation of the solution energy of heat conduction equation are proved by using the basic differential equalities. Furthermore, by using variable substitution, derivation formula and the basic differential Gronwall inequality, the Gronwall inequality of the first order differential type is generalized into two cases: the right-end control term rises from 1 to the αth power ($\alpha>0$); the Gronwall inequality of the first order differential type is extended to the Gronwall inequality of the second order differential type, and the conclusion similar to that of first order differential type is obtained.

Key words: Gronwall inequality; differential equation; application; generalization

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

聂东明, 马艳丽, 潘娜娜. 一类微分型 Gronwall 不等式的应用及推广[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(2):1—5

NIE D M, MA Y L, PAN N N. Application and Generalization of a Class of Differential Gronwall Inequalities[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2020,37(2):1—5