doi:10. 16055/j. issn. 1672-058X. 2019. 0001. 009

鲁棒多目标优化问题的最优性和对偶性

周俊屹，郑　霜

(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘　要：针对非光滑、非凸实值函数的鲁棒多目标优化问题，建立鲁棒(弱)有效解的充分优化条件，并探索了对偶(鲁棒)多目标问题的强弱对偶关系；利用复合函数的极限次微分，凸性推广至(严格)广义伪凸的条件下仍能得到优化问题的最优性条件，并进一步通过对偶问题建立强弱鲁棒对偶性；最后在(严格)广义伪凸的条件之下，得到 3 个定理并加以证明。

关键词：鲁棒多目标优化；最优性条件；对偶性；极限次微分；(严格)广义伪凸

中图分类号：O221. 6　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1672-058X(2019)01-0049-05

0　引　言

众所周知，在经济管理、工程设计、生态保护与道路交通运输等领域中，存在着大量的多目标优化问题。自 20 世纪 70 年代以来，关于多目标优化理论与方法的研究已有大量重要而基础的研究成果[1-3]。又由于真实世界中多目标优化问题的数据通常是不确定的，因此研究不确定型鲁棒多目标优化问题就有了十分重要的理论意义与应用价值，其中鲁棒多目标优化问题的最优性条件和对偶性也受到了研究者们的广泛关注。

2013 年，Chuong 等人[4]考虑了非光滑半无限多目标优化问题，提出了一类根据局部 Lipschitz 函数极限次微分的广义凸和严格广义凸函数，研究了在广义凸和严格广义凸下有效解和弱有效解的充分条件，并且探索了在广义凸和严格广义凸下的弱对偶性和强对偶性；2016 年，Chuong[5]考虑不确定鲁棒多目标优化问题，基于 Ehrgott 等人提出的鲁棒有效解。在广义凸性下，建立了局部鲁棒 Pareto 有效解和局部鲁 Pareto 弱有效解的一些最优性条件，表述了鲁棒多目标优化问题的对偶问题，探索广义凸性下的弱对偶性和强对偶性。

受文献[4-5]研究工作的启示，利用极限法锥和极限次微分，进一步在广义伪凸和严格广义伪凸的条件之下研究了一类鲁棒有效解的一些最优性条件和强弱对偶性。

1　预备知识

为了得到结论，首先给出一些基本记号和基本定义。序关系在多目标优化问题研究中扮演了十分基础且重要的作用[6]，一般采用下面空间中序关系：

(Ⅰ) $y_1<y_2 \Leftrightarrow y_i^1<y_i^2\ \forall\, i=1,2,\ldots,m$；

(Ⅱ) $y_1 \leqq y_2 \Leftrightarrow y_i^1 \leqslant y_i^2\ \forall\, i=1,2,\ldots,m$；

(Ⅲ) $x\leqslant y \Leftrightarrow y_i^1 \leqslant y_i^2\ \forall\, i=1,2,\ldots,m$，且至少有一个 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 使得 $y_i^1<y_i^2$。

$\mathbf{R}^p$ 空间的一些常用子集定义：

(Ⅰ) $\mathbf{R}^p_{\geqq}:=\{y\in\mathbf{R}^p \mid y\geqq 0\}$，$\mathbf{R}^p$ 的非负象限；

(Ⅱ) $\mathbf{R}^p_{\geqslant}:=\{y\in\mathbf{R}^p \mid y\geqslant 0\}=\mathbf{R}^p_{\geqq}\setminus\{0\}$；

收稿日期：2018-04-29；**修回日期：**2018-05-29.

* **基金项目：**重庆市基础与前沿研究计划项目(CSTC2015JCYJA00027)，重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500303).

作者简介：周俊屹(1993—)，女，四川乐山人，硕士研究生，从事最优化理论与方法研究.

(Ⅲ) $\mathbf{R}^p_>:=\{y\in\mathbf{R}^p\mid y>0\}=\mathrm{int}\mathbf{R}^p_{\geqq}$, $\mathbf{R}^p$ 的正象限。

定义 1[5] (Ⅰ) 设 $X\in\mathbf{R}^n$, 集合 $\Omega\subset X$ 和 $\bar{x}\in\Omega$, 则在 Ω 内 $\bar{x}$ 处的法锥 $\hat{N}(\bar{x};\Omega)$ 定义为

$$\hat{N}(\bar{x};\Omega):=\left\{x^*\in X\mid \limsup_{\substack{x\to\bar{x}\\ x\in\Omega}}\frac{\langle x^*,x-\bar{x}\rangle}{\|x-\bar{x}\|}\leqslant 0\right\}$$

若 $\bar{x}\notin\Omega$, 则 $\hat{N}(\bar{x};\Omega):=\varnothing$。

(Ⅱ) 在 Ω 内 $\bar{x}$ 处的极限法锥 $N(\bar{x};\Omega)$ 定义为:

$$N(\bar{x};\Omega):=\limsup_{\substack{x\to\bar{x}\\ x\in\Omega}}\hat{N}(x;\Omega)$$

若 $\bar{x}\notin\Omega$, 则 $N(\bar{x};\Omega):=\varnothing$。

(Ⅲ) 设广义实值函数: $\phi:=X\to\overline{\mathbf{R}}:=[-\infty,\infty]$ 和其上图 $\mathrm{epi}:=\{(x,\mu)\in X\times\mathbf{R}\mid\mu\geqslant\phi(x)\}$, 则 ϕ 在 $\bar{x}\in X$ 且 $|\phi(\bar{x})|<\infty$ 的极限次微分定义为

$\partial\phi(\bar{x}):=\{x^*\in X\mid(x^*,-1)\in N((\bar{x},\phi(\bar{x}));\mathrm{epi}\phi)\}$,

若 $|\phi(\bar{x})|=\infty$, 则 $\partial\phi(\bar{x})=\varnothing$。

设 $\mathbf{R}^{n_i}$ 是欧氏空间且 Ω_i 是 $\mathbf{R}^{n_i}$ 的非空紧子集, 其中 $\forall i\in(1,...,l)$, $n_i\in N:=\{1,2,...,q\}$。

$f:=(f_1,f_2,...,f_m)$ 是向量值函数并且每一分量都在 $\mathbf{R}^n$ 上局部 Lipschitz, $\mathbf{R}^m_+$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的非负卦限。

考虑以下形式的多目标优化问题

$$(\mathrm{UP})\ \min f(x)$$
$$\text{s.t. } g_i(x,w_i)\leqslant 0,\ i=1,...,l,$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$ 是决策变量, $w_i\in\Omega_i$ 是不确定参数, $g_i:\mathbf{R}^n\times\Omega_i\to\mathbf{R}$, $i=1,...,l$ 是给定的函数。

对于研究的问题(UP), 通常有与之相关的鲁棒对应

$$(\mathrm{RP})\ \min f(x)$$
$$\text{s.t. } x\in C,$$

其中可行集 C 定义为

$$C:=\{x\in\mathbf{R}^n\mid g_i(x,w_i)\leqslant 0,\ \forall w_i\in\Omega_i,\ i=1,...,l\}\tag{1}$$

并且记 $\Omega_i(\bar{x}):=\{w_i\in\Omega_i\mid g_i(\bar{x},w_i)=G_i(\bar{x})\}$, 其中

$$G_i(\bar{x}):=\sup_{w_i\in\Omega_i}g_i(\bar{x},w_i)\tag{2}$$

定义 2[7-8] (Ⅰ) 称一个向量 $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$ 是问题(UP)的一个局部鲁棒 Pareto 有效解, 若 $\bar{x}$ 是问题(RP)的一个局部 Pareto 有效解, 即 $\bar{x}\in C$ 且存在 $\bar{x}$ 的一个领域 U 使得 $f(x)-f(\bar{x})\notin-\mathbf{R}^m_+\setminus\{0\}$, $\forall x\in C\cap U$。

(Ⅱ) 称一个向量 $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$ 是问题(UP)的一个局部鲁棒 Pareto 弱有效解, 若 $\bar{x}$ 是问题(RP)的一个局部 Pareto 弱有效解, 即 $\bar{x}\in C$ 且存在 $\bar{x}$ 的一个领域 U 使得 $f(x)-f(\bar{x})\notin-\mathrm{int}\mathbf{R}^m_+$, $\forall x\in C\cap U$, 其中 $\mathrm{int}\mathbf{R}^m_+$ 表示 $\mathbf{R}^m_+$ 的拓扑内部。

将问题(UP)的局部鲁棒 Pareto(弱)有效解解集定义为 $\mathrm{loc}\ S(RP)$($\mathrm{loc}\ S^w(RP)$)。

定义中, 若 $U=\mathbf{R}^n$, 则问题(UP)的鲁棒 Pareto(弱)有效解解集定义为 $S(RP)$($S^w(RP)$)。

定义 3[5] 令 $\bar{x}\in C$, 称约束条件(CQ)在 $\bar{x}$ 处被满足, 如果有

$$0\notin\mathrm{co}\{\cup\partial_x g_i(\bar{x},w_i)\mid w_i\in\Omega_i(\bar{x}),i=1,...,l\}。$$

引理 1[5] 令 $\bar{x}\in\mathrm{loc}\ S^w(RP)$, 则存在 $\lambda_k\geqslant 0$, $k=1,...,m$ 和 $\mu_i\geqslant 0$, $i=1,...,l$ 并且有

$$\sum_{k=1}^m\lambda_k+\sum_{i=1}^l\mu_i=1$$

使得

$$0\in\sum_{k=1}^m\lambda_k\partial f_k(\bar{x})+\sum_{i=1}^l\mu_i\mathrm{co}\{\cup\partial_x g_i(\bar{x},w_i)\mid w_i\in\Omega_i(\bar{x})\}$$
$$\mu_i\sup_{w_i\in\Omega_i}g_i(\bar{x},w_i)=0,\ i=1,...,l\tag{3}$$

此外, 若约束条件(CQ)在 $\bar{x}$ 处被满足, 则 λ_k 不全为零。

定义 4[5] 若点 $\bar{x}\in C$ 满足式(3)且使得 λ_k 不全为零, 则称点 $\bar{x}\in C$ 满足鲁棒(KKT)条件。

2 主要结果

2.1 鲁棒多目标问题的最优性条件

为了刻画问题(UP)的鲁棒 Pareto(弱)有效解的充分条件, 需要首先给出 (f,g) 在某一给定点处广义伪凸和严格广义伪凸的定义如下。

定义 5[9] (Ⅰ) 称 (f,g) 在 $\bar{x}\in R^n$ 处是广义伪凸的, 若对任意 $x\in\mathbf{R}^n$, $z_k^*\in\partial f_k(\bar{x})$, $k=1,...,m$ 和 $x_w^*\in\partial_x g_i(\bar{x},w)$, $w\in\Omega_i(\bar{x})$, $i=1,...,l$, 存在 $v\in\mathbf{R}^n$, 使得 $\langle z_k^*,v\rangle\geqslant 0$ 且 $\langle x_w^*,v\rangle\geqslant 0$, 则

$$f_k(x)-f_k(\bar{x})\geqslant 0 \text{ 且 } g_i(x,w)-g_i(\bar{x},w)\geqslant 0。$$

(Ⅱ) 称 (f,g) 在 $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$ 处是严格广义伪凸的, 若对任意 $x\in\mathbf{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$, $z_k^*\in\partial f_k(\bar{x})$, $k=1,...,m$ 和 $x_w^*\in\partial_x g_i(\bar{x},w)$, $w\in\Omega_i(\bar{x})$, $i=1,...,l$, 存在 $v\in\mathbf{R}^n$, 使得 $\langle z_k^*,v\rangle\geqslant 0$ 且 $\langle x_w^*,v\rangle\geqslant 0$, 则 $f_k(x)-f_k(\bar{x})>0$ 且 $g_i(x,w)-g_i(\bar{x},w)>0$.

定理 1 令 $\bar{x}\in C$ 且满足鲁棒(KKT)条件。

(Ⅰ) 若 (f,g) 在 $\bar{x}$ 处广义伪凸, 则 $\bar{x}\in S^w(\mathrm{RP})$。

(Ⅱ) 若 (f,g) 在 $\bar{x}$ 处严格广义伪凸, 则 $\bar{x}\in S(\mathrm{RP})$。

证明 因为 $\bar{x}\in C$ 且满足鲁棒(KKT)条件, 则存在 $\lambda_k\geqslant 0$, $z_k^*\in\partial f_k(\bar{x})$, $k=1,...,m$,

$$\sum_{k=1}^m\lambda_k\neq 0 \text{ 和 } \mu_i\geqslant 0,\ i=1,...,l,\ \mu_{ij}\geqslant 0,$$

$x_{ij}^{*} \in \partial_x g_i(\bar{x},w_{ij}),w_{ij} \in \Omega_i(\bar{x}),j=1,\ldots,j_i,$

$j_i \in N, \sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}=1,$

使得

$$0=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k z_k^{*}+\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}x_{ij}^{*}),$$

$$\mu_i \sup_{w_i\in\Omega_i} g_i(\bar{x},w_i)=0,i=1,\ldots,l \tag{4}$$

首先证明(Ⅰ)。反证:假设 $\bar{x}\notin S^w(RP)$,则存在 $\hat{x}\in C$ 使得

$$f(\hat{x})-f(\bar{x})\in -\mathrm{int}R_+^m \tag{5}$$

因为 $\lambda_k\geqslant 0,\mu_i\geqslant 0,\mu_{ij}\geqslant 0$ 且 (f,g) 在 $\bar{x}$ 处广义伪凸,对于 $\hat{x}$ 存在 $v\in R^n$,使得 $\langle z_k^{*},v\rangle\geqslant 0$ 且 $\langle x_w^{*},v\rangle\geqslant 0$,则 $f_k(\hat{x})-f_k(\bar{x})\geqslant 0$ 且 $g_i(\hat{x},w)-g_i(\bar{x},w)\geqslant 0$。所以有

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k[f_k(\hat{x})-f_k(\bar{x})]+$$
$$\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}[g_i(\hat{x},w_{ij})-g_i(\bar{x},w_{ij})])\geqslant 0,$$

因此

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\bar{x})+\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}g_i(\bar{x},w_{ij}))\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\hat{x})+\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}g_i(\hat{x},w_{ij})) \tag{6}$$

因 $w_{ij}\in\Omega_i(\bar{x})$,故由式(4)知 $\mu_i g_i(\bar{x},w_{ij})=0$。此外,由于 $\bar{x}\in C$,则 $\mu_i g_i(\hat{x},w_{ij})\leqslant 0$。所以由式(6)可得

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\bar{x})\leqslant\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\hat{x})+$$
$$\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}g_i(\hat{x},w_{ij}))\leqslant\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\hat{x})$$

这必然能够推出存在 $k_0\in\{1,\ldots,m\}$,使得

$$f_{k_0}(\bar{x})\leqslant f_{k_0}(\hat{x}) \tag{7}$$

所以式(7)与式(5)相矛盾。故 $\bar{x}\in S^w(RP)$。

再证明(Ⅱ)。反证:假设 $\bar{x}\notin S(RP)$,则存在 $\hat{x}\in C$ 使得

$$f(\hat{x})-f(\bar{x})\in -R_+^m\setminus\{0\} \tag{8}$$

因为 $\lambda_k\geqslant 0,\mu_i\geqslant 0,\mu_{ij}\geqslant 0$ 且 (f,g) 在 $\bar{x}$ 处严格广义伪凸,对于 $\hat{x}$ 存在 $v\in R^n$,使得 $\langle z_k^{*},v\rangle\geqslant 0$ 且 $\langle x_w^{*},v\rangle\geqslant 0$ 则 $f_k(\hat{x})-f_k(\bar{x})>0$ 且 $g_i(\hat{x},w)-g_i(\bar{x},w)>0$。所以有

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k[f_k(\hat{x})-f_k(\bar{x})]+$$
$$\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}[g_i(\hat{x},w_{ij})-g_i(\bar{x},w_{ij})])>0$$

因此

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\bar{x})+\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}g_i(\bar{x},w_{ij}))<$$
$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\hat{x})+\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}g_i(\hat{x},w_{ij}))$$

如(Ⅰ)中证明可得 $\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\bar{x})<\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\hat{x})$,这必然存在 $k_0\in\{1,\ldots,m\}$ 使得 $f_{k_0}(\bar{x})<f_{k_0}(\hat{x})$,

即就与式(8)相矛盾。故 $\bar{x}\in S(RP)$。

2.2　鲁棒对偶问题的最优性条件

这一部分,首先给出定义并建立鲁棒多目标优化问题的对偶问题,再在广义伪凸和严格广义伪凸的条件之下探索强弱对偶性。

定义 6[5]　设 $\mathbf{R}_+^N:=\{\mu:=(\mu_i,\mu_{ij}),i=1,\ldots,l,j=1,\ldots,j_i|j_i\in N,\mu_i\geqslant 0,\mu_{ij}\geqslant 0,\sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}=1\}$。

设 $z\in\mathbf{R}^n,\lambda:=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{0\},\mu\in\mathbf{R}_+^N$,使得 $\tilde{f}(z,\lambda,\mu):=f(z)+\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}g_i(z,w_{ij}))e$

其中 $e:=(1,\ldots,1)\in\mathbf{R}^m$ 和 $w_{ij}\in\Omega_i,i=1,\ldots,l,j=1,\ldots,j_i$。

为了使给定的对偶问题的目标函数和约束函数中的变量统一,用 $\tilde{f}(z,\lambda,\mu)$ 代替 $\tilde{f}(z,\mu)$,但 λ 是独立的。

与鲁棒多目标优化问题(RP)相关,下面是对偶鲁棒多目标优化问题

$$(\mathrm{RD})\ \max\ \tilde{f}(z,\lambda,\mu)$$
$$\mathrm{s.t.}\ (z,\lambda.\mu)\in C_D$$

可行集 $C_D:=\{(z,\lambda,\mu))\in(\mathbf{R}_+^m\setminus\{0\})\times\mathbf{R}_+^N|0\in\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\partial f_k(z)+\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\sum_{j=1}^{j_i}\mu_{ij}x_{ij}^{*})\}$,其中

$x_{ij}^{*}\in\{\cup\partial_x g_i(z,w_{ij})|w_{ij}\in\Omega_i(z)\}$,$\Omega_i(z)$ 定义为式(2)中将 $\bar{x}$ 换为 z。

对偶问题(RD)的(局部)鲁棒(弱)有效解的定义类似于定义 2,将对偶问题(RD)的鲁棒 Pareto(弱)有效解解集记作(S^w(RD))S(RD)。

定理 2　(弱鲁棒对偶性)令 $x\in C$ 和 $(z,\lambda,\mu)\in C_D$。

(Ⅰ)若(f,g)在 z 处是广义伪凸的,则

$$f(x)-\tilde{f}(z,\lambda,\mu)\notin -\mathrm{int}\mathbf{R}_+^m$$

(Ⅱ)若(f,g)在 z 处是严格广义伪凸的,则

$$f(x)-\tilde{f}(z,\lambda,\mu)\notin -\mathbf{R}_+^m\setminus\{0\}$$

证明　因为 $(z,\lambda,\mu)\in C_D$,则存在 $\lambda:=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in\mathbf{R}_+^m\setminus\{0\},z_k^{*}\in\partial f_k(z),k=1,\ldots,m$

和 $\mu_i \geqslant 0, i=1,\ldots,l, \mu_{ij} \geqslant 0, x_{ij}^* \in \partial_x g_i(z,w_{ij}), w_{ij} \in \Omega_i(z), j=1,\ldots,j_i, j_i \in N, \sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} = 1$，使得

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k z_k^* + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} x_{ij}^* \Big)$$

先证明(Ⅰ)。反证:假设 $f(x) - \tilde{f}(z,\lambda,\mu) \in -\mathrm{int}\mathbf{R}_+^m$ 即 $\langle \lambda, f(x) - \tilde{f}(z,\lambda,\mu) \rangle < 0$，等价于下列不等式(9)

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k [f_k(x) - f_k(z)] - \sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} g_i(z,w_{ij}) \Big) < 0 \tag{9}$$

因为 $\lambda_k \geqslant 0, \mu_i \geqslant 0, \mu_{ij} \geqslant 0$ 且 (f,g) 在 z 处是广义伪凸的，对于 x 存在 $v \in \mathbf{R}^n$，使得 $\langle z_k^*, v \rangle \geqslant 0$ 且 $\langle x_w^*, v \rangle \geqslant 0$ 则 $f_k(x) - f_k(z) \geqslant 0$ 且 $g_i(x,w) - g_i(z,w) \geqslant 0$，所以有

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k [f_k(x) - f_k(z)] + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} [g_i(x,w_{ij}) - g_i(z,w_{ij})] \Big) \geqslant 0 \tag{10}$$

因 $x \in C$，由式(10)可以得到

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k [f_k(x) - f_k(z)] - \sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} g_i(z,w_{ij}) \Big) \geqslant 0,$$

与式(9)矛盾故(Ⅰ)得证。

再证明(Ⅱ)。反证:假设

$$f(x) - \tilde{f}(z,\lambda,\mu) \in -\mathbf{R}_+^m \setminus \{0\} \tag{11}$$

即 $\langle \lambda, f(x) - \tilde{f}(z,\lambda,\mu) \rangle \leqslant 0$，等价于下列不等式

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k [f_k(x) - f_k(z)] - \sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} g_i(z,w_{ij}) \Big) \leqslant 0 \tag{12}$$

式(11)意味着 $x \neq z$，若 $x = z$，则

$$f(x) - \tilde{f}(z,\lambda,\mu) = -\sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} g_i(x,w_{ij}) \Big) e\text{。}$$

由式(11)推出

$$-\sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} g_i(x,w_{ij}) \Big) e \in -\mathbf{R}_+^m \setminus \{0\},$$

这是不可能的。因为 $x \in C$ 可以推出

$$\sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} g_i(x,w_{ij}) \Big) \leqslant 0\text{。}$$ 故 $x \neq z$。

因为 $\lambda_k \geqslant 0, \mu_i \geqslant 0, \mu_{ij} \geqslant 0$ 且 (f,g) 在 z 处严格广义伪凸，对于 x 存在 $v \in \mathbf{R}^n$，使得 $\langle z_k^*, v \rangle \geqslant 0$ 且 $\langle x_w^*, v \rangle \geqslant 0$ 则 $f_k(x) - f_k(z) > 0$，且 $g_i(x,w) - g_i(z,w) > 0$，所以有

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k [f_k(x) - f_k(z)] + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} [g_i(x,w_{ij}) - g_i(z,w_{ij})] \Big) > 0$$

因为 $x \in C$ 因而可以得到

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k [f_k(x) - f_k(z)] - \sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} g_i(z,w_{ij}) \Big) > 0,$$

与式(12)矛盾。故(Ⅱ)得证。

定理 3 (强鲁棒对偶性)

令 $\bar{x} \in \mathrm{loc}\ S^w\ (RP)$ 且约束条件(CQ)在 $\bar{x}$ 处被满足。存在 $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in (\mathbf{R}_+^m \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}_+^N$，使得 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in C_D$ 和 $f(\bar{x}) = \tilde{f}(x,\lambda,\mu)$。进一步则有：

(Ⅰ) 若 (f,g) 在任意点 $z \in \mathbf{R}^n$ 处是广义伪凸的，则 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in S^w\ (RD)$。

(Ⅱ) 若 (f,g) 在任意点 $z \in \mathbf{R}^n$ 处是严格广义伪凸的，则 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in S_{(\mathrm{RD})}$。

证明 根据引理 1，存在 $\lambda_k \geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \neq 0$，$z_k^* \in \partial f_k(\bar{x}), k=1,\ldots,m$，和 $\mu_i \geqslant 0, i=1,\ldots,l, \mu_{ij} \geqslant 0, x_{ij}^* \in \partial_x g_i(\bar{x},w_{ij}), w_{ij} \in \Omega_i(\bar{x}), j=1,\ldots,j_i, j_i \in N, \sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} = 1$，使得

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k z_k^* + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} x_{ij}^* \Big) \tag{13}$$

$$\mu_i \sup_{w_i \in \Omega_i} g_i(\bar{x}, w_i) = 0, i=1,\ldots,l \tag{14}$$

设 $\bar{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ 和 $\bar{\mu} := (\mu_i, \mu_{ij})$，则有

$$(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in (\mathbf{R}_+^m \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}_+^N\text{。}$$

由于式(13)有 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in C_D$，因为 $w_{ij} \in \Omega_i(\bar{x})$ 所以由式(14)有

$$\mu_i g_i(\bar{x}, w_{ij}) = 0, \forall i=1,\ldots,l, \forall j=1,\ldots,j_i$$

故

$$\sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} g_i(\bar{x},w_{ij}) \Big) = 0$$

因此，$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{j_i} \mu_{ij} g_i(\bar{x},w_{ij}) \Big) e = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$。

(Ⅰ) 中 (f,g) 在任意点 $z \in \mathbf{R}^n$ 处是广义伪凸的，由定理 2 的(Ⅰ)有 $\tilde{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) - \tilde{f}(z,\lambda,\mu) \notin -\mathrm{int}\mathbf{R}_+^m$，$\forall (z,\lambda,\mu) \in C_D$。故 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in S^w\ (RD)$。

(Ⅱ) 中 (f,g) 在任意点 $z \in \mathbf{R}^n$ 处是严格广义伪凸的，由定理 2 的(Ⅱ)则有

$$\tilde{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) - \tilde{f}(z,\lambda,\mu) \notin -\mathbf{R}_+^m \setminus \{0\},$$

$\forall (z,\lambda,\mu) \in C_D$。故 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in S\ (RD)$

参考文献(References):

[1] 赵洁,陈林,赵克全. 一类多目标规划问题的混合型对偶[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2011,28(2):145—146
ZHAO J,CHEN L,ZHAO K Q. Mixed Type Duality for a Class of Multiobjective Programming Problems [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2011,28(2):145—146

[2] SAWARAGI Y. Theory of Multiobjective Optimization [M]. Academic Press,1985

[3] 林锉云,董家礼. 多目标最优化的方法与理论[M]. 长春:吉林教育出版社,1992
LIN C Y, DONG J L. The Method and Theory of Multiobjective Optimization [M]. Changchun: Jilin Education Press,1992

[4] CHUONG T D, KIM D S. Nonsmooth Semi-infinite Multiobjective Optimization Problems [J]. Journal of Optimization Theory Application, 2014, 160 (3): 748—762

[5] CHUONG T D. Optimality and Duality for Robust Multiobjective Optimization Problems [J]. Nonlinear Analysis,2016,134: 127—143

[6] EHRGOTT M. Multicriteria Optimization [M]. Berlin: Springer-Verlag,2005

[7] EHRGOTT M,IDE J,SCHOBEL A. Minmax Robustness for Multiobjective Optimization Problems [J]. European Journal of Operational Research,2014,239(1): 17—31

[8] KUROIWA D, LEE G M. On Robust Multiobjective Optimization [J]. Journal of Nonlinear & Convex Analysis,2012,40(2):1271—1275

[9] BAZARA A, MOKHTAR S. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms [M]. Wiley,1979

[10] 龙蒲均,皮巧丽,赵克全. 关于 KT-伪Ⅱ型不变凸性的一个注记[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2012,29(1):16—18
LONG P J,PI Q L,ZHAO K Q. A Note on the Invariant Convexity of KT-Pseudo Ⅱ Type [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2012,29(1): 16—18

Optimality and Duality for Robust Multiobjective Optimization Problems

ZHOU Jun-yi, ZHENG Shuang

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: For the robust multiobjective optimization problem involving nonsmooth/nonconvex real-valued functions, the sufficient optimality conditions for robust (weakly) Pareto solutions are established. In addition, weak and strong duality relations of the dual multiobjective problem are explored. Using the limiting subdifferential of the compound function, the optimality condition of the optimization problem can still be obtained under the condition of (strictly) generalized pseudoconvex, and the strong and werk duality can be established by the dual problem. Finally, under the condition of (strictly) generalized pseudoconvex, three theorems are obtained and proved.

Key words: robust multiobjective optimization; optimality condition; duality; limiting subdifferential; (strictly) generalized pseudoconvex.

责任编辑:田　静

引用本文/Cite this paper:

周俊屹,郑霜. 鲁棒多目标优化问题的最优性和对偶性 [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2019,36(1):49—53

ZHOU J Y, ZHENG S. Optimality and Duality for Robust Multiobjective Optimization Problems [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2019,36(1):49—53