doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2019.0001.005

直觉模糊熵改进的公理化定义和计算公式

郑婉容, 郑婷婷, 张毛银
(安徽大学 数学科学学院, 合肥 230601)

摘 要: 直觉模糊熵是用来刻画直觉模糊集的不确定性和未知性程度的,首先介绍了模糊熵的定义,给出了直觉模糊集的相关知识;接着分析和深入探讨已有直觉模糊熵公理化定义,找出存在的缺陷对其进行修改;然后分析已有直觉模糊熵公式,概括出其中的要点,提出一个新的计算公式; 最后举例说明改进的公理化定义和计算公式符合客观规律.

关键词: 直觉模糊集;直觉模糊熵;隶属度;非隶属度

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-058X(2019)01-0027-05

0 引 言

通常情况下,现实世界有很多东西分类都是模棱两可,没有明确的界限,这样就容易出现模糊性概念. Zadeh[1] 的模糊集理论在 1965 年被提出来,它对于一些不确定性问题可以提供很多的依据;1986 年,Atanassov[2] 给出直觉模糊集. 对于刻画它们的不确定性,相应的熵理论也快速发展起来.

1972 年,模糊熵的公理化定义被 Deluca 和 Termini[3] 共同提出. 直觉模糊熵公理化定义是由 Bustince H 和 Burillo P[4] 最早开始给出. 由于这个定义的应用不能广泛推广,有一定的限制,2001 年,Szmidt[5] 修改了这个定义,运用几何知识提出直觉模糊熵公式. 文献[6]提出一些新的相关概念,讨论了已有的公理化定义存在的问题并且进行了修改,在满足改进的公理化定义的基础上给出一个新的直觉模糊熵公式. 在文献[7]中指出文献[8]中公理化的缺陷,提出新的公理化定义与公式并且将其应用到决策中. Ye[9] 利用三角函数这个数学概念给出两个直觉模糊熵公式,但这两个公式所考虑的变量问题过于片面,即没有考虑犹豫度,仅仅涉及模糊集的隶属度和非隶属度之间的差异,不能完整反映出直觉模糊程度. 此处提出修改过的公理化定义和公式,并证明了新的公式符合修正过的公理化定义.

1 模糊熵的公理化定义

定义 1[10] $\forall A, B \in F(X)$,其中 $F(X)$ 为论域 X 上的模糊子集的全体.

映射:$H: F(X) \to [0,1]$,则模糊集的模糊熵 H 满足下面约束:

① $\forall x \in X, \mu_A(x) \in \{0,1\} \Leftrightarrow H(A)=0$;

② $\forall x \in X, \mu_A(x) \equiv 0.5 \Leftrightarrow H(A)=1$;

③ $\forall x \in X, \mu_B(x) \leqslant \mu_A(x) \leqslant 0.5$ 或 $\mu_B(x) \geqslant \mu_A(x) \geqslant 0.5 \Leftrightarrow H(B) \leqslant H(A)$;

④ $\forall A \in F(X), H(A)=H(A^c)$.

度量模糊集的模糊程度是采用隶属度这个变量,为了度量直觉模糊集的模糊程度,要考虑其含有的变量基础上,提出相应的公理化定义.

收稿日期: 2018-01-21;**修回日期:** 2018-04-01.

作者简介: 郑婉容(1992—),女,安徽蚌埠人,硕士研究生,从事智能计算、模糊集理论研究.

2 直觉模糊熵的公理化定义

定义 2[3] 设 X 为一个集合,$\mu_A:X\to[0,1]$,$v_A:X\to[0,1]$,满足:

$$\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1,\forall x\in X$$

则称 $A=(X,\mu_A,\nu_A)$ 为 X 上的一个直觉模糊子集,且记 $A(x)=(\mu_A(x),\nu_A(x))$,其中 $\mu_A(x)$ 为元素 x 对 A 的隶属程度,$\nu_A(x)$ 为元素 x 对 A 的非隶属程度.

直觉模糊集 A 的补集记为 A^c,即

$A^c=\{\langle x,v_A(x),\mu_A(x)\rangle \mid x\in X\}$

当直觉模糊集 $A=(X,\mu_A,\nu_A)$,满足 $\mu_A(x)+\nu_A(x)=1,\forall x\in X$,即 A 退化为 Zadeh 模糊集.

下面给出两个预备知识:

在直觉模糊集 A 中,由于隶属度和非隶属度相加不等于 1 并且代表 x 对于一个 A 属于或不属于关系是确定的,现在想要将不等号改为等号,就需要加入一个新的变量即犹豫度使之达到平衡,该变量反映了直觉 Fuzzy 集的不确定性.

定义 3 $\forall x\in X$,记 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$,$0\leqslant\pi_A(x)\leqslant 1$,那么称 $\pi_A(x)$ 为 x 属于 A 的犹豫度.

注 1 直觉 Fuzzy 集退化成 Fuzzy 集的充要条件是 $\pi_A(x)=0$.

在直觉 Fuzzy 集 A 中,由于 $\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$ 没有明确的大小比较,而新定义的变量即核要求是大于 0 的,不能为负数,所以需要加一个绝对值.

定义 4 $\forall x\in X$,记 $S_A(x)=|\mu_A(x)-\nu_A(x)|$,$0\leqslant S_A(x)\leqslant 1$,那么称 $S_A(x)$ 为 x 属于 A 的核.

2001 年,Szmidt E 和 Kacprzyk J 提出了直觉模糊熵的新的公理化定义.

定义 5[5] 设 $E:IFS(X)\to\mathbf{R}^+$ 为一个映射,E 为 $IFS(X)$ 上的熵,即有 E 如下:

① $E(A)=0\Leftrightarrow A$ 为分明集;

② $E(A)=1\Leftrightarrow\forall x\in X,\mu_A(x)=\nu_A(x)$;

③ $\forall x\in X$,当 $\mu_B(x)\leqslant\nu_B(x)$ 时,有 $\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$ 且 $\nu_A(x)\geqslant\nu_B(x)$,当 $\mu_B(x)\geqslant\nu_B(x)$ 时,有 $\mu_A(x)\geqslant\mu_B(x)$ 且 $\nu_A(x)\leqslant\nu_B(x)$,则 $E(A)\leqslant E(B)$;

④ $E(A)=E(A^c)$.

注 2 定义 5 中,直觉模糊熵只采用了 $\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$,忽略了 $\pi_A(x)$,因此不予推广.

H-Y 公理化定义[8] 是考虑 $\mu_A(x)+\nu_A(x)+\pi_A(x)=1,\forall x\in X$ 成立,但是由于概率是随机事件发生可能性的大小,其值在 0 到 1 之间,事件确定不发生的概率是 0,确定发生的概率为 1,这样就与 $\mu_A(x)$,$\nu_A(x)$ 和 $\pi_A(x)$ 的概念存在着偏差,不能将两者混淆,因此不能将这 3 个变量作为概率测度.

完整地考虑 $\mu_A(x)$,$\nu_A(x)$,$\pi_A(x)$ 这 3 个变量的关系,补充条件,提出了一个新的直觉模糊熵公理化定义:

定义 6 $\forall A,B\in IFS(x)$,称映射 $E:IFS(x)\to\mathbf{R}^+$ 为 $IFS(X)$ 上的熵,即 E 有如下性质:

① $E(A)=0\Leftrightarrow A$ 为分明集;

② $E(A)=1\Leftrightarrow\forall x_i\in X,\mu_A(x)=\nu_A(x)$ 成立;

③ $E(A)$ 是关于 $S_A(x)=|\mu_A(x)-\nu_A(x)|$ 的单调减函数,是关于 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ 的单调增函数;

④ $E(A)=E(A^c)$.

定义 6 中,性质①说明当直觉 Fuzzy 集退化成普通集时,即是明确集;性质②说明直觉模糊熵为 1 的充要条件是 $\mu_A(x)$ 与 $\nu_A(x)$ 没有差值;性质③说明直觉模糊熵是 $S_A(x)$ 和 $\pi_A(x)$ 函数,即 $\pi_A(x)=\pi_B(x)$,$S_A(x)\leqslant S_B(x)$ 时,$E(A)\geqslant E(B)$;$S_A(x)=S_B(x)$,$\pi_A(x)\leqslant\pi_B(x)$ 时,$E(A)\leqslant E(B)$. 性质④说明 A 与其补集 A^c 的模糊程度一样.

3 现有直觉模糊熵存在的问题

魏翠萍等[12] 证明出 Ye[9] 给出的两个直觉模糊熵是等价的,即

$$J_1(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sin\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi+\sin\frac{1-\mu_A(x_i)+\nu_A(x_i)}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}$$

$$J_2(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\cos\frac{1+\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi+\cos\frac{1-\mu_A(x_i)+\nu_A(x_i)}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}$$

证出

$$J_1(A)=J_2(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sqrt{2}\cos\frac{\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}\tag{1}$$

由此可见式(1)只考虑 $\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$ 之间的关系,没有考虑 $\pi_A(x)$,因此与直觉不符.

Burillo[13]等提出的直觉模糊熵为

$$E(A)=\sum_{i=1}^{n}[1-(\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i))]=\sum_{i=1}^{n}\pi_A(x_i) \tag{2}$$

式(2)与上面的式(1)相反,仅仅考虑 $\pi_A(x)$ 的变化,其模糊性没被考虑,因此不能作为直觉模糊集的不确定性度量.

4　新的直觉模糊熵公式

定理 1　设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$A=\{\langle x_i,\mu_A(x_i),\nu_A(x_i)\rangle \mid x_i\in X\}$ 是 X 上的直觉模糊集,则定义直觉模糊熵:

$$E(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{1-|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}{1+|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}\frac{\pi}{2}$$

证明　要证明式(3)是直觉模糊熵,只需要证明该式满足定义 6 的 4 个条件即可,令

$$E_i(A)=\sin\frac{1-|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}{1+|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}\frac{\pi}{2}$$

由于 $0\leqslant\mu_A(x_i)\leqslant1$,$0\leqslant\nu_A(x_i)\leqslant1$,$0\leqslant\pi_A(x_i)\leqslant1$,则可以得到:

$$0\leqslant\frac{1-|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}{1+|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}\leqslant1$$

也即

$$0\leqslant\frac{1-|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}{1+|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$$

因此 $0\leqslant E_i(A)\leqslant1$,得到 $0\leqslant E(A)\leqslant1$.

1) 若 $E(A)=0$,由于 $0\leqslant E_i(A)\leqslant1$,可以得到 $E_i(A)=0$.

由 $0\leqslant\frac{1-|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}{1+|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$ 得到 $\mu_A(x_i)=1$,$\nu_A(x_i)=0$ 或 $\mu_A(x_i)=0$,$\nu_A(x_i)=1$.

若 A 为分明集时,$\forall x_i\in X$,有 $\mu_A(x_i)=1$,$\nu_A(x_i)=0$ 或 $\mu_A(x_i)=0$,$\nu_A(x_i)=1$,则有 $E_i(A)=0$,即 $E(A)=0$.

2) $\forall x_i\in X$,有 $\mu_A(x_i)=\nu_A(x_i)$,可得 $E_i(A)=1$,即 $E(A)=1$.

若 $E(A)=1$,$E(A)=\frac{1}{n}E_i(A)$,$0\leqslant E_i(A)\leqslant1$,得 $E_i(A)=1$,由 $0\leqslant\frac{1-|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}{1+|\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$,得 $\mu_A(x_i)=\nu_A(x_i)$.

3) 令 $S_A(x)=|\mu_A(x)-\nu_A(x)|=x$,$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)=y$,其中 $0\leqslant x\leqslant1$,$0\leqslant y\leqslant1$.

则令 $f(x,y)=\sin\frac{1-x+y}{1+x+y}\times\frac{\pi}{2}$,分别关于 x,y 求偏导得:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{1-x+y}{1+x+y}\frac{\pi}{2}\right)\frac{-2-2y}{(1+x+y)^2}\leqslant0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{1-x+y}{1+x+y}\frac{\pi}{2}\right)\frac{2x}{(1+x+y)^2}\geqslant0$$

则 $E(A)$ 关于 $S_A(x)=|\mu_A(x)-\nu_A(x)|=x$ 是单调减函数,关于 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)=y$ 是单调增函数.

4) $E(A^c)=$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{1-|\nu_A(x_i)-\mu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}{1+|\nu_A(x_i)-\mu_A(x_i)|+\pi_A(x_i)}\times\frac{\pi}{2}=E(A)$$

例 1　计算直觉模糊集

$A_1=\{\langle x_i,0.1,0.3\rangle \mid x_i\in X\}$

$A_2=\{\langle x_i,0.2,0.4\rangle \mid x_i\in X\}$

$A_3=\{\langle x_i,0.2,0.5\rangle \mid x_i\in X\}$

$A_4=\{\langle x_i,0.4,0.3\rangle \mid x_i\in X\}$

的直觉模糊熵.

解　利用 Ye 提出的直觉模糊熵公式得到:

$$J(A_1)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sqrt{2}\cos\frac{0.1-0.3}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}=0.958\ 0$$

$$J(A_2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sqrt{2}\cos\frac{0.2-0.4}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}=0.958\ 0$$

$$J(A_3)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sqrt{2}\cos\frac{0.2-0.5}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}=0.905\ 7$$

$$J(A_4)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sqrt{2}\cos\frac{0.4-0.3}{4}\pi-1\right]\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}=0.989\ 5$$

可以看出对于直觉模糊集 A_1 和 A_2 来说,它们的犹豫度 $\pi_{A_1}(x_i)\neq\pi_{A_2}(x_i)$,但 $J(A_1)=J(A_2)$,显然与直觉不符.

利用 Burillo 等给出的直觉模糊熵公式:

$$E(A)=\sum_{i=1}^{n}\left[1-(\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i))\right]=\sum_{i=1}^{n}\pi_A(x_i)$$

得到 $E(A_1)=0.6$,$E(A_2)=0.4$,$E(A_3)=0.3$,$E(A_4)=0.3$. 对于直觉模糊集 A_3 和 A_4 来说,$E(A_3)=E(A_4)$,可以看出忽略了 $\mu_A(x)$ 与 $\nu_A(x)$ 的差异,因此与直觉不符.

现在利用新的直觉模糊熵公式得到:

$$E(A_1)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{1-|0.1-0.3|+0.6}{1+|0.1-0.3|+0.6}\times\frac{\pi}{2}=\sin\frac{7}{18}\pi=0.939\ 7$$

$$E(A_2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{1-|0.2-0.4|+04}{1+|0.2-0.4|+0.4}\times\frac{\pi}{2}=\sin\frac{3}{8}\pi=0.923\ 9$$

$$E(A_3)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{1-|0.2-0.5|+0.3}{1+|0.2-0.5|+0.3}\times\frac{\pi}{2}=\sin\frac{5}{16}\pi=0.831\ 5$$

$$E(A_4)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{1-|0.4-0.3|+0.3}{1+|0.4-0.3|+0.3}\times\frac{\pi}{2}=\sin\frac{3}{7}\pi=0.975\ 0$$

由此可见,在两个直觉模糊集的核 $S_A(x)=|\mu_A(x)-\nu_A(x)|$ 相同的时候,其犹豫度越大,说明这个直觉模糊集的模糊程度越高,则对应的熵越大,即 $E(A_1)<E(A_2)$. 在两个直觉模糊集的犹豫度相同时,其核越小,说明直觉模糊集的模糊程度越高,则对应的熵越大,即 $E(A_3)<E(A_4)$,结果与人们的直觉相符.

5 结 论

模糊熵本身只是简单的考虑隶属度和非隶属度这两个变量的一系列相关变化,即使这样对于它的研究也是很艰难的. 而直觉模糊集是在模糊集的基础上发展起来的,对应的直觉模糊熵是在模糊熵的基础上又考虑了犹豫度,因此对于直觉模糊熵的深入研究变得更加深奥. 多年来对于直觉模糊熵的公理化定义和公式被诸多学者所提出,由于当时知识水平具有一定的局限性,这些定义和公式出现了各种各样的不足而未能被广泛推广. 在前人研究的基础上,对已有公理化定义和公式进行总结与修改,提出改进的定义,同时利用数学中的正弦函数的概念提出新的公式,算例表明新的公式符合人们的认知.

参考文献(References):

[1] ZADEHL A. Fuzzy Sets[J]. Information and Control, 1965,8(3):338—356

[2] ATANASSOV K T. Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,2012,20(1):87—96

[3] DELUCA A,Termini S. A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Set Theory[J]. Information and Control,1972(20):301—312

[4] BUSTINCE H,BURILLO P. Vague Sets Are Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1996,79(3):403—405

[5] SZMIDT E, KACPRZYK J. Entropy for Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,2001,118(3):467—477

[6] 吕印超,郭嗣琮. 直觉模糊集的熵及其一般形式[J]. 计算机工程与应用,2011,47(28):52—55
LV Y C, GUO S C. Entropy and its General Form of Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Computer Engineering and Applications,2011,47(28):52—55

[7] 沈小雪,郭嗣琮. 新的直觉模糊熵公式及其应用[J].

计算机工程与应用,2013,49(24):28—31
SHEN X X, GUO S C. New Intuitionistic Fuzzy Entropy Formula and its Application[J]. Computer Engineering and Application,2013,49(24):28-31

[8] 吴涛,白礼虎,刘二宝,等. 直觉模糊集新的熵公式及应用[J]. 计算机工程与应用,2013,49(23):48—51
WU T, BAI L H, LIU E B, et al. New Entropy Formula and Application of Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Computer Engineering and Application,2013,49(23):48—51

[9] YE J. Two Effective Measures of Intuitionistic Fuzzy Entropy[J]. Computing,2010,87(1-2):55—62

[10] 郑婷婷,储友福,李宝萍. Vague 熵的构造方法再研究[J]. 计算机工程与应用,2013,49(20):108—111
ZHENG T T, CHU Y F, LI B P. Reconstruction Methods of Vague Entropy[J]. Computer Engineering and Applications, 2013,49(20):108—111

[11] HUNG W L, YANG M S. Fuzzy Entropy on Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2006,21(4):443—451

[12] 魏翠萍,高志海,郭婷婷. 一个基于三角函数的直觉模糊熵公式[J]. 控制与决策,2012,27(4):571—574
WEI C P, GAO Z H, GUO T T. An Intuitive Fuzzy Entropy Formula Based on Trigonometric Functions[J]. Control and Decision Making,2012,27(4):571—574

[13] BURILLO P, BUSTINCE H. Entropy on Intuitionistic Fuzzy Sets and on Interval-valued Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets & Systems,1996,78(3):305—316

The Axiomatic Definition and Calculation Formula of Intuitionistic Fuzzy Entropy Improvement

ZHENG Wan-rong, ZHENG Ting-ting, ZHANG Mao-yin
(School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: Intuitionistic fuzzy entropy is used to characterize the uncertainty and unknownness of intuitionistic fuzzy sets. This paper first introduces the definition of fuzzy entropy and gives the relevant knowledge of intuitionistic fuzzy sets. Since entropy is used to measure the degree of chaos in the system, intuitionistic fuzzy entropy is used to measure its uncertainty, i. e. , membership, non-membership and hesitation affect the intuitionistic fuzzy entropy, and then this idea is used to analyze and deeply explore the intuitionistic fuzzy entropy. There is an axiom definition to identify existing defects and modify them. Then the existing intuitionistic fuzzy entropy formula is analyzed, the main points are summarized, and a new calculation formula is proposed. Finally, an example is given to illustrate the fact that the content proposed in this paper conforms to the objective law.

Key words: intuitionistic fuzzy set; intuitionistic fuzzy entropy; degree of membership; non-membership degree

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:
郑婉容,郑婷婷,张毛银. 直觉模糊熵改进的公理化定义和计算公式[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2019,36(1):27—31
ZHENG W R, ZHENG T T, ZHANG M Y. The Axiomatic Definition and Calculation Formula of Intuitionistic fuzzy entropy improvement[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University(Natural Science Edition),2019,36(1):27—31