doi:10.16055/j. issn. 1672-058X. 2019. 0001. 004

一类复平面内二阶微分方程解的渐近式*

崔庆岳, 赵国瑞
(广州城建职业学院 人文学院,广州 510925)

摘 要:针对如何求解一类复平面内满足一定初始条件下的二阶微分方程的通解和特解,以及微分方程特解及其导数在不同区域内渐近表达式的问题,提出了利用积分方程理论和微分算子中特征值和特征函数渐近理论推导并证明了相关结论;通过在积分方程中引入满足特定条件的积分核的方法证明了积分方程解的有界性和连续性,从而为后续结论的推导证明提供了理论支撑,另外通过引入一类性质很好的广义积分函数并通过迭代逼近的方法给出了微分方程特解及其导数在特定区域内的渐近表达式;根据所得结果可知,微分方程特解的渐近式的精度得以提高,同时探讨了进一步提高微分方程特解的渐近式精度的方法.

关键词:复平面; 积分方程; 积分核;微分方程; 渐近式

中图分类号:O175. 3 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-058X(2019)01-0021-06

0 引 言

考虑下面的积分方程:

$$u(x,s)= f(x,s) +\int_a^{\infty} k(x,\xi,s)u(\xi,s)\mathrm{d}\xi \qquad (1)$$

其中积分核 $k(x,\xi,s)$ 满足下列条件:

① 对于复平面上的某一集合 E 内的一个固定 s 和 $[a,\infty)$ 上固定的 x, $k(x,\xi,s)$ 关于 ξ 在 $[a,\infty)$ 上是可积的;

② 存在正数 $\gamma<1$,使得 $\int_a^{\infty}|k(x,\xi,s)|\mathrm{d}\xi<\gamma$ 成立,其中 $\forall s\in E$, $\forall x\in[a,\infty)$;

③ 对于 $[a,\infty)$ 内固定的 x_0 和 E 内固定的 s_0,有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ s\to s_0}}\int_a^{\infty}|k(x,\xi,s)-k(x_0,\xi,s_0)|\mathrm{d}\xi=0$,其中 $a\leqslant x,x_0\leqslant\infty$, $s,s_0\in E$;

④ 函数 $f(x,s)$ 在 $a\leqslant x<\infty$, $s\in E$ 上关于 x,s 是连续的、有界的.

由积分方程理论可知:

引理 1 若积分方程式(1)中的积分核满足上述条件①—条件③,函数 $f(x,s)$ 满足条件④,则方程式(1)具有一个在 $x\in[a,\infty)$ 和 $s\in E$ 上连续有界的解 $u(x,s)$.

证明 通过迭代的方法逼近方程的解,假定

$$u_0(x,s)=0$$

$$u_{n+1}(x,s)=f(x,s)+\int_a^{\infty}k(x,\xi,s)u_n(\xi,s)\mathrm{d}\xi \qquad (2)$$

其中 $a\leqslant x<\infty$, $s\in E$.

记 $\varepsilon_0=\{(x,s),x\in[a,\infty),s\in E\}$,下证 $u_{n+1}(x,s)$ 在 ε_0 上连续有界,并且对 $\forall(x,s)\in\varepsilon_0$ 积分方程式(2)收敛.

当 $n=0$,上述结论显然成立;当 $n=m$ 时,假设上述结论成立.

当 $n=m+1$ 时,对 $\forall(x,s)\in\varepsilon_0$, $|u_m(x,s)|\leqslant$

收稿日期:2018-06-29;**修回日期:**2018-08-09.
* **基金项目:**2018 年广东省科技创新培育专项资金(PDJHB0987).
作者简介:崔庆岳(1984—),男,山东济宁人,讲师,硕士,从事微分算子及谱分析研究.

c_m,则

$$\left|\int_a^{\infty} k(x,\xi,s)u_m(\xi,s)\mathrm{d}\xi\right| \leqslant$$

$$c_m\int_a^{\infty} \left|k(x,\xi,s)\right| \mathrm{d}\xi \leqslant c_m\gamma < c_m$$

成立. 从而证明了积分方程式(2)的收敛性和 $u_{m+1}(x)$的有界性.

对于$(x_0,s_0)\in\varepsilon_0$,有

$$|u_{m+1}(x,s) - u_{m+1}(x_0,s_0)| =$$

$$\left|\int_a^{\infty} k(x,\xi,s)u_m(\xi,s)\mathrm{d}\xi - \int_a^{\infty} k(x_0,\xi,s_0)u_m(\xi,s_0)\mathrm{d}\xi\right| =$$

$$\left|\int_a^{\infty}[k(x,\xi,s) - k(x_0,\xi,s_0)]u_m(\xi,s)\mathrm{d}\xi\right| +$$

$$\left|\int_a^{\infty} k(x_0,\xi,s_0)\left(u_m(\xi,s) - u_m(\xi,s_0)\right)\mathrm{d}\xi\right| \leqslant$$

$$\left|\int_a^{\infty}[k(x,\xi,s) - k(x_0,\xi,s_0)]u_m(\xi,s)\mathrm{d}\xi\right| +$$

$$\left|\int_a^{N} k(x_0,\xi,s_0)\left(u_m(\xi,s) - u_m(\xi,s_0)\right)\mathrm{d}\xi\right| +$$

$$\left|\int_N^{\infty} k(x_0,\xi,s_0)\left(u_m(\xi,s) - u_m(\xi,s_0)\right)\mathrm{d}\xi\right| \leqslant$$

$$c_m\int_a^{\infty}|k(x,\xi,s) - k(x_0,\xi,s_0)|\mathrm{d}\xi + \gamma\max_{a\leqslant\xi\leqslant N}| u_m(\xi,s) -$$

$$u_m(\xi,s_0)| + 2c_m\int_N^{\infty}|k(x_0,\xi,s_0)|\mathrm{d}\xi \qquad (3)$$

取 N 充分大,令(x,s)无限接近(x_0,s_0),由 $k(x_0,\xi,s_0)$的性质及 $u_m(\xi,s)$的连续性可得式(3)右端可以充分小,所以 $u_{m+1}(\xi,s)$在 ε_0 上连续.

下面考虑级数:

$$u_0(x,s)+[u_1(x,s)-u_0(x,s)]+$$
$$[u_2(x,s)-u_1(x,s)]+\cdots+[u_n(x,s)-u_{n-1}(x,s)]+$$
$$[u_{n+1}(x,s)-u_n(x,s)]+\cdots \qquad (4)$$

令 $u_n = \sup\limits_{(x,s)\in\varepsilon_0}|u_n(x,s) - u_{n-1}(x,s)|$ $n=1,2,\cdots$, 并且设 $u_0=0$,则

$$|u_{n+1}(x,s) - u_n(x,s)| =$$

$$\left|\int_a^{\infty} k(x,\xi,s)[u_n(\xi,s) - u_{n-1}(\xi,s)]\mathrm{d}\xi\right| \leqslant$$

$$u_n\int_a^{\infty}|k(x,\xi,s)|\mathrm{d}\xi \leqslant \gamma u_n$$

即 $u_{n+1}\leqslant u_n\gamma$.

又由于 $\gamma<1$,所以级数 $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$收敛,从而级数式(4)在 ε_0 上一致收敛,并且

$$u(x,s)=u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x,s) - u_{n-1}(x,s)] = \lim_{n\to\infty} u_n(x,s)$$

所以 $u(x,s)$是积分方程式(1)的解,而且根据 $u_m(x,s)$的性质以及在 ε_0 上的一致收敛性可知,$u(x,s)$在 ε_0 上连续,有界.

引理 2 若积分方程式(1)的积分核 $k(x,\xi,s)$同时满足条件①—条件④,并且有条件:

⑤ E 是复平面 C 上的开集;

⑥ 对每个固定的 $x\in[a,\infty)$,$f(x,s)$在 E 上是解析函数;

⑦ 对每个固定的 $x\in[a,\infty)$,满足条件④—条件⑥ 的函数 $f(x,s)$所对应的积分$\int_a^{\infty}k(x,\xi,s)f(\xi,s)\mathrm{d}\xi$. 在 E 上是解析函数,则对每个固定的 $x\in[a,\infty)$,方程式(1)的解 $u(x,s)$在 E 上是解析函数.

事实上,对每个固定的 $x\in[a,\infty)$,$u_n(x,s)$在 E 上是解析函数,由一致收敛性得 $u(x,s)$在 E 上也是解析函数.

注 1 若 $q(x)$在$[a,\infty)$上可积,$\phi_1(x,\xi,s)$,$\phi_2(x,\xi,s)$在 $a\leqslant x,\xi\leqslant\infty$, $s\in E$ 上满足条件 $c\int_a^{\infty}|q(\xi)|\mathrm{d}\xi < 1$,其中 $c=\max\{\sup|\phi_1(x,\xi,s)|, \sup|\phi_2(x,\xi,s)|\}$,则

$$k(x,\xi,s)=\begin{cases}\phi_1(x,\xi,s) & a\leqslant\xi\leqslant x\\ \phi_2(x,\xi,s) & a\leqslant x\leqslant\xi\end{cases} \qquad (5)$$

满足条件①—条件③.

注 2 若 $\phi_1(x,\xi,s)$,$\phi_2(x,\xi,s)$对固定的 $x,\xi\in[a,b]$关于 s 在 E 上解析,则 $k(x,\xi,s)$满足条件⑦.

在实数域内微分算子已有大量的成果,包括自伴域、谱理论等方面已有较系统和完善的结论,其中关于特征值和方程解的研究也有大量的成果,譬如在文献[1]中作者利用 E.C.Titc-hmarsh 所引进的函数论的方法得到 Sturm-Liouville 问题存在可数个实的单重特征值,并且给出特征值及特征函数的渐近式;在文献[2]中作者给出了带有独立参数的特征值和特征函数的渐近式;在文献[3-4]中作者给出了在满足不同条件下的谱函数的渐近式;文献[5-6]分别给出了线性和非线性二阶微分方程解的

渐近式,得到了比较好的近似结果;文献[7]中则给出了一类二阶微分方程解的渐近性的证明方法;文献[8]利用通解的结构和自由项的形式来求二阶常系数线性齐次微分方程的解;文献[9]则利用微积分运算把一个二阶微分方程的边值问题转化为积分方程,然后用泰勒矩阵的方法得到其近似解.

以上结论都是基于实数域内得出的,但是在复数域内的研究成果还相对较少,在文献[10]中作者给出了复平面内复值函数 $q(x)$ 在满足分段连续和绝对连续条件下方程解的渐近式;文献[11]中作者在复平面内给出了带有复数系数的 Emden-Fowler 型方程解的渐近性.

本文首先利用积分方程理论并结合常数变易法得到复平面内二阶微分方程 $l(y)=\lambda y$ 的通解,并给出了方程的通解在满足不同初始条件下的两个特解,同时证明了其在不同的区域内都是解析函数;其次探讨了微分方程的两个特解及其导数在满足 $0\leqslant\arg s<\pi,\tau\geqslant 0$ 且 $s\in E$ 条件下当 $x\to+\infty$ 的渐近表达式,另外通过引入积分上限函数 $Q(x)=\int_x^\infty q(\xi)\,\mathrm{d}\xi$,并利用迭代逼近的方法给出了微分方程的两个特解及其导数在满足 $0\leqslant\arg s<\pi,\tau\geqslant 0,x\in[0,\infty)$ 条件下当 $s\to+\infty$ 时的渐近表达式,使得方程解的近似精度得以提高.

1　微分方程 $l(y)=\lambda y$ 的解系

主要研究二阶微分方程:

$l(y)=-y''+q(x)y(0\leqslant x\leqslant\infty)$

生成的微分算子的相关结论,其中 $q(x)$ 为$[0,\infty)$上的复值函数,且在$[0,\infty)$上可积.

下面考虑微分方程:

$$l(y)=\lambda y \tag{6}$$

方程式(6)可化为

$$y''+\lambda y=q(x)y \tag{7}$$

利用常数变易法可得方程式(7)的解:

$$y(x,s)=c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}+\frac{\mathrm{i}}{2s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\int_{x_1}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\xi}q(\xi)y(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi-\frac{\mathrm{i}}{2s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\int_{x_2}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\xi}q(\xi)y(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi$$

其中微分方程的特征根 λ 满足条件:

$\sqrt{\lambda}=s=\sigma+\mathrm{i}\tau,0\leqslant\arg s<\pi,\tau\geqslant 0$

① 若令 $c_1=1,c_2=0,x_1=x_2=\infty$,得到方程式(7)的特解:

$$y(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^\infty[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi-x)}]q(\xi)y(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi \tag{8}$$

根据积分方程理论可知,当 x 充分大时,式(8)有解.

设 $y(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}z(x,s)$,则方程

$$z(x,s)=1+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^\infty[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]q(\xi)z(\xi,x)\,\mathrm{d}\xi$$

有一个非零解 $z(x,s)$

下面考虑积分核 $k(x,\xi,s)$ 为如下形式:

$$k(x,\xi,s)=\begin{cases}0 & a\leqslant\xi\leqslant x\\ \dfrac{\mathrm{i}}{2s}[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]q(\xi) & a\leqslant x\leqslant\xi\end{cases}$$

的积分方程式(1),即在式(5)中,有

$$\phi_1(x,\xi,s)=0,\phi_2(x,\xi,s)=\frac{\mathrm{i}}{2s}[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]$$

设 E 是复平面 C 上的集合,$|s|\geqslant\gamma>0,s\in C,\tau\geqslant 0$,则对 $\xi>x$,且 $s\in E$,有

$$|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}|=\mathrm{e}^{-2\tau(\xi-x)}\leqslant 1$$

所以 $|\phi_2(x,\xi,s)|\leqslant\dfrac{1}{\gamma}$.

当 $\dfrac{1}{\gamma}\int_a^\infty|q(\xi)|\,\mathrm{d}\xi<1$ 时,根据引理 2 的注 1 可知,积分核 $k(x,\xi,s)$ 满足引理 1 的所有条件,从而方程式(8)关于 x,s 是连续的,在 ε_0 上有界的解 $z(x,s)$ 在上半平面为解析函数,所以

$$y(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}z(x,s) \tag{9}$$

是积分方程式(8)的解,也是方程式(6)的一个满足一定初始条件的特解.

将上述解式(9)在$[0,\infty)$上延拓后记为 $y_1(x,s)$,显然 $y_1(x,s)$ 可以延拓到$[0,a]$上,满足条件 $y=y_1,y'=y'_1,x=a$. 函数 $y_1(x,s)$ 在$[0,a]$上满足方程式(8),所以 $y_1(x,s)$ 就是在$[0,\infty)$上方程式(8)的解,同时也是方程式(6)的解.

定理 1 方程式(6)存在一个解 $y_1(x,s)$ 满足积分方程:

$$y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}q(\xi)y_1(\xi,s)\mathrm{d}\xi-\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(x-\xi)}q(\xi)y_1(\xi,s)\mathrm{d}\xi$$

其中 $y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}z(x,s)$,函数 $z(x,s)$ 在区域 $a\leqslant x<\infty$,$|s|\geqslant\gamma>0,\tau\geqslant 0$ 是有界的,选取充分大 a,使得 $\frac{1}{\gamma}\int_a^{\infty}|q(\xi)|\mathrm{d}\xi<1$,则 $y_1(x,s)$ 关于 x,s 是连续的,对某一个固定 $x\in[0,\infty)$,$y_1(x,s)$ 在 $\tau\geqslant 0$ 上关于 s 是一个解析函数.

② 若令 $c_1=0,c_2=1,x_1=x_2=\infty$,同样得到方程式(6)的另外一个特解.

定理 2 方程式(6)存在一个特解 $y_2(x,s)$ 满足积分方程

$$y_2(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}q(\xi)y_2(\xi,s)\mathrm{d}\xi-\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi-x)}q(\xi)y_2(\xi,s)\mathrm{d}\xi$$

其中 $y_2(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}u(x,s)$,函数 $u(x,s)$ 在区域 $a\leqslant x<\infty$,$|s|\geqslant\gamma>0,\tau\geqslant 0$ 是有界的,并且选取充分大 a,使得 $\frac{1}{\gamma}\int_a^{\infty}|q(\xi)|\mathrm{d}\xi<1$,则 $y_2(x,s)$ 关于 x,s 是连续的,对某一个固定 $x\in[0,\infty)$,$y_2(x,s)$ 在 $\tau\geqslant 0$ 上关于 s 是一个解析函数.

2 微分方程 $l(y)=\lambda y$ 解的渐近式

① 考虑微分方程 $l(y)=\lambda y$ 的解 $y_1(x,s)$,$y_2(x,s)$ 及其导数在 $x\to+\infty$ 时的渐近式,其中 $s=\sigma+\mathrm{i}\tau$,$0\leqslant\arg s<\pi,\tau\geqslant 0$.

定理 3 当 $x\to+\infty$ 时,微分方程的解 $y_1(x,s)$ 及其导数 $y'_1(x,s)$ 的渐近式为

$$y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}[1+o(1)]$$
$$y'_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}[\mathrm{i}s+o(1)]$$

且在区域 $|s|\geqslant\gamma>0,\tau\geqslant 0$ 上关于 s 一致成立.

证明 考虑积分方程:

$$z(x,s)=1+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]q(\xi)z(\xi,s)\mathrm{d}\xi$$

对充分大 γ,当 $|s|\geqslant\gamma>0,x\geqslant a$ 时,由定理 1 可知 $z(x,s)$ 在上述区域内有界,不妨设 $|z(x,s)|\leqslant c_1$,$0\leqslant x\leqslant\infty$,$|s|\geqslant\gamma$,则当 $|s|\geqslant\gamma>0,x\geqslant a$ 时,

$$\left|\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}[1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]q(\xi)z(\xi,s)\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\frac{c_1}{\gamma}\int_x^{\infty}|q(\xi)|\mathrm{d}\xi$$

当 $x\to+\infty$ 时,$\int_x^{\infty}|q(\xi)|\mathrm{d}\xi\to 0$,所以 $z(x,s)=1+o(1)$,因此可得 $y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}(1+o(1))$.

同样由 $y'_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\{\mathrm{i}s-\frac{1}{2}\int_x^{\infty}[1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s(\xi-x)}]q(\xi)z(\xi,s)\mathrm{d}\xi\}$,得 $y'_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}(\mathrm{i}s+o(1))$,证毕.

利用同样的方法可得函数 $y_2(x,s)$ 及其导数 $y_2'(x,s)$ 在 $x\to+\infty$ 时的渐近式.

定理 4 当 $x\to+\infty$ 时,函数 $y_2(x,s)$ 及其导数 $y_2'(x,s)$ 的渐近式为

$$y_2(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}[1+o(1)]$$
$$y'_2(x,s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}[-\mathrm{i}s+o(1)]$$

在区域 $\gamma\leqslant s<\infty,\gamma>0$ 内关于 s 一致成立.

证明 同定理 3.

② 考虑微分方程 $l(y)=\lambda y$ 的解 $y_1(x,s)$,$y_2(x,s)$ 及其导数在 $s\to+\infty$ 时的渐近式,其中 $s=\sigma+\mathrm{i}\tau$,$0\leqslant\arg s<\pi,\tau\geqslant 0$.

定理5 对于复数虚部 $\tau\geqslant 0$,且当 $s\to+\infty$ 时,

$$y_1(x,s)=(1+\frac{\mathrm{i}}{2s}Q(x)+\frac{1}{8s^2}Q^2(x))\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}o(s^{-1})$$

$$y'_1(x,s)=(\mathrm{i}s+\frac{\mathrm{i}}{2s}q(x)+\frac{q(x)}{4s^2}Q(x)-\frac{1}{2}Q(x)+\frac{\mathrm{i}}{8s}Q^2(x))\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}-\mathrm{i}s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}o(s^{-1})$$

其中 $Q(x)=\int_x^{\infty}q(\xi)\mathrm{d}\xi$,且 $q(x)$ 绝对连续,$q'(x)$ 存在并且可积.

证明 对 $y_1(x,s)$ 进行迭代可得:

$$y_1(x,s)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi-x)}]q(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi-x)}]q(\xi)\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_{\xi}^{\infty}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi-\eta)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\eta-\xi)}]q(\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\eta}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi+\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}o(s^{-3})\quad(10)$$

对式(10)右端第二项估计可得:

$$\frac{\mathrm{i}}{2s}\int_x^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(x-2\xi)}\right]q(\xi)\,\mathrm{d}\xi=$$

$$\frac{\mathrm{i}}{2s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\int_x^{\infty}q(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\frac{\mathrm{i}}{2s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}s(x-\xi)}q(\xi)\,\mathrm{d}\xi=$$

$$\frac{\mathrm{i}}{2s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}Q(x)-\frac{\mathrm{i}}{2s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s\xi}q(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad (11)$$

其中式(11)第二项取绝对值,再由定理 1 可得:

$$\left|-\frac{\mathrm{i}}{2s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s\xi}q(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|\leqslant$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}}{|s|}\int_0^{\infty}|q(\xi)|\,\mathrm{d}\xi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}o\left(\frac{1}{s}\right)$$

同样根据定理 1,对式(10)第三项进行估计可得:

$$-\frac{1}{4s^2}\int_x^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(x-\xi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(x-\xi)}\right]$$

$$q(\xi)\int_\xi^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(\xi-2\eta)}\right]q(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi=$$

$$-\frac{1}{4s^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\int_x^{\infty}\left[1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}s(x-\xi)}\right]$$

$$q(\xi)\int_\xi^{\infty}\left[1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}s(\xi-\eta)}\right]q(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi=$$

$$-\frac{1}{4s^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\int_x^{\infty}q(\xi)Q(\xi)\,\mathrm{d}\xi+$$

$$\frac{1}{4s^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\int_x^{\infty}q(\xi)\int_\xi^{\infty}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}s(\xi-\eta)}q(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi+$$

$$\frac{1}{4s^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}s\xi}q(\xi)Q(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}o(s^{-2})=$$

$$\frac{1}{8s^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}Q^2(x)+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx})o(s^{-2})$$

综合以上可得定理 5 成立.

利用相同的方法对函数 $y_2(x,s)$ 及其导数 $y_2'(x,s)$ 进行渐近估计可得:

定理 6 对于复数虚部 $\tau\geqslant 0$,且当 $s\to+\infty$ 时,

$$y_2(x,s)=\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2s}Q(x)+\frac{1}{8s^2}Q^2(x)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}o(s^{-1})$$

$$y'_2(x,s)=(-\mathrm{i}s-\frac{\mathrm{i}}{2s}q(x)+\frac{q(x)}{4s^2}Q(x)-$$

$$\frac{1}{2}Q(x)-\frac{\mathrm{i}}{8s}Q^2(x))\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+\mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}o(s^{-1})$$

证明 同定理 5.

通过以上证明,给出了微分方程在满足不同初始条件下的两个特解及其导数在两种不同变化趋势下的渐近式,并且渐近式的精度取决于复平面内所选定的区域;另外,在 $s\to+\infty$ 的变化趋势下,方程解的近似精度主要取决于函数 $q(x)$ 的性质,如果函数 $q(x)\in[0,+\infty)$ 除了满足绝对连续,$q'(x)$ 存在且可积之外,还存在高阶导数,则二阶微分方程特解的渐近式将会更加精确,这是本文后续要研究的内容.

参考文献(References):

[1] 曹之江. 常微分算子[M]. 上海:上海科技出版社,1987
CAO Z J. The Ordinary Differential Operator [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press,1987

[2] ALTI NSIK N, KADAKAL M, MUKHTAROVO S H. Eigenvalues and Eigenfunctions of Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter-dependent Boundary Conditons[J]. Acta Mathematic Hunger,2004,102(1/2):159—175

[3] EASTHAM M S P. The Asymptotic Nature of Spectral Functions in Sturm-Liouville Problems with Continuous Spectrum [J]. J Math Analysis Appl, 1997, 213: 573—582

[4] 崔庆岳. 谱函数的渐近表达式[J]. 东莞理工学院学报,2012,19(1):19—23
CUI Y Y. The Asymptotic Expression of the Spectral Function [J]. Journal of Dongguan Institute of Technology,2012,19(1):19—23

[5] CHEN G Y M, PENG M J, ZHANG W. On the Asymptotic Behavior of the Solutions of a Class of Second Order Nonlinear Differential Equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,1998,98(1): 63—79

[6] KARSAI J. On the Asymptotic Behaviour of the Solutions of a Second Order Linear Differential Equation with Small Damping[J]. Acta Mathematica Hungarica,1993,61 (1-2):121—127

[7] 高建全,杨义川. 一个二阶常微分方程解的渐近性的证明方法[J]. 河南科学,2018,36(5):641—645
GAO J Q, YANG Y C. A Proof Method for Asymptotic Behavior of Solutions of a Second Order Ordinary Differential Equation[J]. Henan Clapper,2018,36(5): 641—645

[8] 李迎娣. 二阶常系数线性非齐次微分方程的一些解法

[J]. 中央民族大学学报(自然科学版),2018,26(1):21—23
LI Y D. Some Solutions to the Second Order Linear Nonhomogeneous Differential Equations with Constant Coefficients [J]. Journal of Central University for Nationalities(Natural Science Edition), 2018, 26 (1): 21—23
[9] 黄力,段向阳,欧艳. 一类二阶微分方程边值问题的近似解[J]. 湖南工业大学学报,2011,25(3):25—26,96
HUANG L, DUAN X Y, OU Y. Approximate Solution of Boundary Value Problem for a Class of Second Order Differential Equations[J]. Journal of Hunan University of Technology,2011,25(3):25—26,96
[10] EASTHAM M S P. The Spectral Theory of Periodic Differential Equations[M]. London: Scottish Academic Press,1973:61—65
[11] ASTASHOVA I V. On the Asymptotic Behavior of Solutions of an Equation of the Emden-Fowler Type with a Complex Coefficient [J]. Journal of Mathematical Sciences,2007,142(3):2033—2037

Asymptotic Formula of the Second Order Differential Equation Solution in the Complex Plane

CUI Qing-yue, ZHAO Guo-rui

(School of Humanities, Guangzhou City Construction College, Guangzhou 510925, China)

Abstract: In view of how to solve the general solution and special solution to meet some initial conditions of the second order differential equation within a class of complex plane, the solution and its derivative of the differential equation, and its asymptotic expressions in different areas of the problem, this paper proposed to use the theory of integral equation and differential operator eigenvalue and eigenfunction of gradual theoretical derivation and proved the relevant conclusions. By introducing the integral kernel method which satisfies certain conditions in the integral equation, the boundedness and continuity of the integral equation solution are proved, which provide the theoretical support for subsequent conclusion. By introducing a kind of good nature generalized integral function and by using the method of iterative approximation, the special solution of the differential equation and its asymptotic expression of its derivative in a specific area are given. According to the results, the precision of the special solution of the differential equation is improved, meanwhile, the method for further improving the asymptotic expression precision of the special solution of the differential equation is discussed.

Key words: complex plane; integral equation; integral kernel; differential equation; asymptotic expression

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:
崔庆岳,赵国瑞. 一类复平面内二阶微分方程解的渐近式[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2019,36(1):21—26
CUI Q Y, ZHAO G R. Asymptotic Formula of the Second Order Differential Equation Solution in the Complex Plane[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University(Natural Science Edition),2019,36(1):21—26