doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2019.0001.003

鲁棒凸多目标优化问题解集的刻画*

郑 霜, 周俊屹

(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

摘 要: 针对一类数据不确定的鲁棒凸多目标优化问题,提出了它在一般不确定集下的鲁棒对应形式;利用标量化方法将鲁棒多目标对应形式转化为鲁棒单目标凸优化问题,建立两者解集之间的联系;并得到了标量化鲁棒解的乘子刻画,及该标量化问题在其鲁棒解集上的一般化的常微分性质和常拉格朗日性质;最后通过前面的性质得到了鲁棒凸多目标优化问题的鲁棒 G-真有效解集的刻画并加以证明.

关键词: 多目标优化;标量化;鲁棒真有效解集

中图分类号: O221.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-058X(2019)01-0013-08

单目标数学规划问题最优解集的刻画方法对理解具有多重最优解的数学规划问题的解法具有重要的作用. 众所周知,对于各种类型的数学规划问题解的刻画[1-5],通常假定程序的输入量或输入数据是精确的. 然而,实际生活中优化问题的目标函数通常是多个的情形,并且由于预测或测量误差,导致与目标函数和约束函数相关的输入数据通常是不确定或不完整的[6-7]. 因此,研究此类不确定多目标优化问题就显得尤为重要. 近几年,单目标鲁棒对应问题中与最优解集刻画相关的问题和对偶等性质已被广泛研究[6-10],并且多目标优化理论与方法的研究已有大量重要的研究成果[11-17].

受参考文献[8]中研究方法的启发,本文研究不确定凸多目标规划的鲁棒 G-真有效解集的刻画. 首先研究的是不确定凸多目标鲁棒对应问题的标量化问题中一般化的常微分性质和常拉格朗日性质,再利用这些性质最后得到该标量化问题的鲁棒解集的刻画.

1 预备知识

为了得到本文结论,首先给出一些基本记号和基本定义. 设$<\cdot,\cdot>$是定义在 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$上的内积. 记$\mathbb{R}^n$的非负象限为$\mathbb{R}^n_+=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n: x_i\geqslant 0\}$. 对$\mathbb{R}$中的集合 A,A 的拓扑内部(或相对代数内部、闭包)记为 $\text{int}\,A$(或 $\text{ri}\,A$, $\text{cl}\,A$). 若 A 为凸集,则对任意的 $a_1,a_2\in A$,任意的 $\mu\in[0,1]$ 满足 $\mu a_1+(1-\mu)a_2\in A$. 一个函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是凸函数当且仅当对所有的 $\mu\in[0,1]$,对所有的 $x,y\in\mathbb{R}^n$有 $f((1-\mu)x+\mu y)\leqslant(1-\mu)f(x)+\mu f(y)$. 若函数 f 是$\mathbb{R}^n$上的凹函数,则$-f$ 是$\mathbb{R}^n$上的凸函数. 令 A 是$\mathbb{R}^n$中的闭凸集,关于 A 的指示函数 δ_A 定义为

$$\delta_A(x):=\begin{cases}0, & x\in A\\ +\infty, & \text{其他}\end{cases}$$

集合 A(凸)在点 $x\in\mathbb{R}^n$处的法锥定义为

$$N_A(x):=\begin{cases}\{y\in\mathbb{R}^n:<y,a-x>\leqslant 0,\forall a\in A\}, & x\in A\\ \varnothing, & \text{其 他}\end{cases}$$

对于一个连续可微的函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,记 f 的梯度为

收稿日期: 2018-05-08;**修回日期:** 2018-06-17.

* **基金项目:** 重庆市基础与前沿研究计划项目(CSTC2015JCYJA00027),重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500303).

作者简介: 郑霜(1994—),女,重庆市江津区人,硕士研究生,从事最优化理论与方法研究.

$\nabla_x f$. 令 $C\subseteq\mathbb{R}^q$,如果 $f:\mathbb{R}^n\times C\to\mathbb{R}$ 是连续可微的,用 $\nabla_x f$ 表示 f 关于第一个变量的梯度. 令 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上连续的凸函数,那么 f(凸)在 $x\in\mathbb{R}^n$ 点处的次微分定义为

$$\partial f(x):=\{z\in\mathbb{R}^n:\langle z,y-x\rangle\leqslant f(y)-f(x),\ \forall y\in\mathbb{R}^n\}$$

对于函数 $f:\mathbb{R}^n\times C\to\mathbb{R}$,若对所有 $u\in C$, $f(\cdot,u)$ 是凸函数,则用 $\partial_x f(\cdot,u)$ 来表示 f 在其第一个分量的次微分.

考虑如下这个多目标优化问题:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x))$$
$$\text{s.t. } g_j(x)\leqslant 0,j\in J=\{1,2,\cdots,m\}$$

其中,$f_i,i\in I=\{1,2,\cdots,p\}$ 和 $g_j,j\in J$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数. 这类问题假定了精确的输入量和输入数据,且已被广泛地研究. 特别是,单目标数学规划问题中最优解集的刻画已在参考文献[1-5]中给出,这些文献在研究具有多个最优解的数学规划问题的解法中起到了重要作用.

然而,在实际问题中,由于预测或测量的误差[6-7]导致与目标和约束相关的输入数据通常是不确定或不完整的. 因此对于以上模型,目标函数和约束函数在面对数据不确定时可以改为如下参数化模型:

$$(\text{MOP})\min_{x\in\mathbb{R}^n}\left(f_1(x,u_1),f_2(x,u_2),\cdots,f_p(x,u_p)\right)$$
$$\text{s.t. } g_j(x,v_j)\leqslant 0,j\in J$$

其中,u_i 和 v_j 是不确定参数,并且他们分别属于凸紧的不确定集 $U_i\subseteq\mathbb{R}^{q_0}$ 和 $V_j\subset\mathbb{R}^q$, $i\in I,j\in J$.

假设 1[15] 本文规定 $f_i:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{q_0}\to\mathbb{R}$, $i\in I$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{q_0}$ 上的连续函数,使得对每一个 $u_i\in U_i\subseteq\mathbb{R}^{q_0}$,满足 $f_i(\cdot,u_i)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个正常凸函数,并且 $g_j:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}$, $j\in J$ 是一个连续函数使得对每一个 $v_j\in V_j\subseteq\mathbb{R}^q$,满足 $g_j(\cdot,v_j)$ 是一个正常凸函数.

受参考文献[14]的启发研究给定一个解点的鲁棒 G-真有效解集的刻画问题,这种方法需要用到如下的多目标鲁棒对应形式:

$$(\text{RMOP})\ \min\left(\max_{u_1\in U_1}f_1(x,u_1),\max_{u_2\in U_2}f_2(x,u_2),\cdots,\max_{u_p\in U_p}f_p(x,u_p)\right)$$
$$\text{s.t. } g_j(x,v_j)\leqslant 0,v_j\in V_j,j\in J.$$

令

$$f(x)=\left(\max_{u_1\in U_1}f_1(x,u_1),\max_{u_2\in U_2}f_2(x,u_2),\cdots,\max_{u_p\in U_p}f_p(x,u_p)\right)$$

将(RMOP)标量化为如下单目标鲁棒优化模型 $(\text{SP})_\lambda$,其中取定一个

$$\lambda\in\Lambda^{++}=\left\{\lambda\in\mathbb{R}^p:\lambda\in\text{int}\,\mathbb{R}^p_+,\sum_{i=1}^p\lambda_i=1\right\}$$

$$(\text{SP})_\lambda\min\sum_{i=1}^p\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)$$
$$\text{s.t. } g_j(x,v_j)\leqslant 0,v_j\in V_j,j\in J$$

近几年,这种鲁棒单目标优化问题解点的刻画,对偶性质和计算处理性在参考文献[6-9]中已被广泛研究.

定义 1[14-15]

(1)(鲁棒可行集)问题(MOP)中的鲁棒可行集定义为

$$F:=\left\{x\in\mathbb{R}^n:g_j(x,v_j)\leqslant 0,v_j\in V_j,j\in J\right\}$$

(2)((MOP)的鲁棒 G-真有效解)设 $\bar{x}\in F$, $\bar{x}$ 为(MOP)的鲁棒 G-真有效解当且仅当 $\bar{x}$ 为(RMOP)的一个鲁棒 G-真有效解. 若 $\bar{x}$ 为(MOP)的 G-真有效解,则满足它是(MOP)的鲁棒有效解且存在常数 $M>0$ 使得对每一个满足 $\max_{\xi_i\in U_i}f_i(\hat{x},\xi_i)>\max_{\xi_i\in U_i}f_i(x,\xi_i)$ 的 i 和存在满足 $\max_{\xi_j\in U_j}f_j(\hat{x},\xi_j)<\max_{\xi_j\in U_j}f_j(x,\xi_j)$ 的 j 有:

$$\frac{\max_{\xi_i\in U_i}f_i(x,\xi_i)-\max_{\xi_i\in U_i}f_i(\hat{x},\xi_i)}{\max_{\xi_j\in U_j}f_j(\hat{x},\xi_j)-\max_{\xi_j\in U_j}f_j(x,\xi_j)}\leqslant M$$

记(MOP)所有 G-真有效解构成的集合为 S,且本文所讨论的鲁棒真有效解都指鲁棒 G-真有效解.

(3)$(\text{SP})_\lambda$ 的鲁棒解集为

$$S_\lambda=\left\{x\in F:\sum_{i=1}^p\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)\leqslant\sum_{i=1}^p\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(y,u_i),y\in F\right\}$$

定理 1[13] 对给定的 $\lambda\in\Lambda^{++}$,若 $\bar{x}$ 为 $(\text{SP})_\lambda$ 的鲁棒解,则 $\bar{x}$ 为(MOP)的鲁棒真有效解.

那么由定理 1 有:$S_\lambda\subseteq S$. 本文只研究这种特殊的标量化 $(\text{SP})_\lambda$ 问题的鲁棒解的刻画.

定理 2[16] 设 p_1,p_2,p_3 是 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 上的正常凸函数. 若存在点 $x_0\in(\text{dom}\,f_1)\cap(\text{dom}\,f_2)$,

使得 f_1 在点 x_0 处是连续的,则:

(1) 若 $\alpha\geqslant 0$,则 $\partial(\alpha p)(x)=\alpha\partial p(x)\quad x\in\mathbb{R}^n$.

(2) $\partial(p_1+p_2)(x)=\partial p_1(x)+\partial p_2(x)\quad x\in\mathbb{R}^n$.

其中 $\mathrm{dom}\ p:=\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)<+\infty\}$. 令

$$\tilde f_i(x)=\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i),i\in I,\tilde f(x)=\sum_{i=1}^p\lambda_i\tilde f_i(x)$$

又 $f_i(x,u_i)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{q_0}$ 上连续的凸函数,则对每一个 $u_i\in U_i$,满足 $f_i(\cdot,u_i)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续的凸函数,$\tilde f_i(x)$ 是实值凸函数,则 $\tilde f_i(x)$ 是连续的凸函数,则由定理 2 有

$$\partial\left(\sum_{i=1}^p\lambda_i\tilde f_i(x)\right)=\sum_{i=1}^p\lambda_i\partial\tilde f_i(x),x\in\mathbb{R}^n$$

引理 1[15]　令 $U_i,i\in I$ 是 $\mathbb{R}^{q_0}$ 上的凸紧集,$f_i:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{q_0}\to\mathbb{R},i\in I$,满足对任意的 $u_i\in U_i$,$f_i(\cdot,u_i)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数且对任意 $x\in\mathbb{R}^n$,$f_i(x,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^{q_0}$ 上的凹函数,那么集合

$$\bigcup_{u_i\in U_i}\{\partial_x f_i(\bar x,u_i):f_i(\bar x,u_i)=\tilde f_i(\bar x)\}$$

是闭凸集,且

$$\partial\tilde f_i(\bar x)=\bigcup_{u_i\in U_i}\{\partial_x f_i(\bar x,u_i):)\ (f_i(\bar x,u_i)=\tilde f_i(\bar x)\},i\in I$$

由上述引理,可得(MOP)的鲁棒真有效解子集 S_λ 中对于一个鲁棒真有效解 $\bar x\in S_\lambda$ 的乘子刻画的命题,该命题在 S_λ 的刻画中扮演了一个重要的角色.

命题 1　($(\mathrm{SP})_\lambda$ 鲁棒解的充分必要条件)对问题 $(\mathrm{SP})_\lambda$,令 F 是鲁棒可行集,S_λ 是鲁棒解集,令 $\bar x\in F$. 设对每一个 $x\in\mathbb{R}^n$ 满足 $f_i(x,\cdot)$ 和 $g_j(x,\cdot)$,$i\in I,j\in J$ 是凹函数且存在 $x_0\in\mathbb{R}^n$,满足 $g_j(x_0,v_j)<0,v_j\in V_j,j\in J$. 那么 $\bar x$ 是一个鲁棒解(即 $\bar x\in S_\lambda$)当且仅当存在 $\bar u_i\in U_i,\bar\beta_j\geqslant 0,\bar v_j\in V_j,i\in I,j\in J$,使得

$$f_i(\bar x,\bar u_i)=\max_{u_i\in U_i}f_i(\bar x,u_i)\ 且$$

$$0\in\sum_{i=1}^p\lambda_i\partial_x f_i(\bar x,\bar u_i)+\sum_{j=1}^m\bar\beta_j\partial_x g_j(\bar x,\bar v_j),$$
$$\bar\beta_j g_j(\bar x,\bar v_j)=0\tag{1}$$

证　(充分性)令 $\bar x\in S_\lambda$,定义 $\tilde f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 对所有的 $x\in\mathbb{R}^n$ 有:

$$\tilde f(x)=\sum_{i=1}^p\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)$$

又 $U_i,i\in I$ 是紧集且对每一个 $u_i\in U_i$ 满足 $f_i(\cdot,u_i)$ 是连续的凸函数,则 $\tilde f_i$ 是实值凸函数,因此 $\tilde f(x)=\sum_{i=1}^p\lambda_i\tilde f_i(x)$ 是连续的凸函数. 因为 $\bar x\in S_\lambda$,则有

$$0\in\partial(\tilde f+\delta_F)(\bar x)=\partial\tilde f(\bar x)+N_F(\bar x)\tag{2}$$

其中 δ_F 是与 F 相关的指示函数,$N_F(\bar x)$ 是集合 F 在 $\bar x$ 处的法锥. 式(2)成立因为 $\tilde f$ 是连续的,又由于 $\partial\tilde f(\bar x)=\sum_{i=1}^p\lambda_i\partial\tilde f_i(\bar x)$,则由引理 1 有:

$$0\in\sum_{i=1}^p\lambda_i(\bigcup_{u_i\in U_i}\{\partial_x f_i(\bar x,u_i):f_i(\bar x,u_i))=(\max_{u_i\in U_i}f_i(\bar x,u_i)\})+N_F(\bar x)$$

即存在 $\bar u_i\in U_i,i=1,2,\cdots,p$,满足 $f_i(\bar x,\bar u_i)=\max_{u_i\in U_i}f_i(\bar x,u_i)$,有:

$$0\in\sum_{i=1}^p\lambda_i\partial_x f_i(\bar x,\bar u_i)+N_F(\bar x)$$

接下来只需证

$$N_F(\bar x)\subseteq\bigcup_{v_j\in V_j,\beta_j\geqslant 0}\left\{\sum_{j=1}^m\beta_j a_j:(a_j\in\partial_x g_j(\bar x,v_j),\beta_j g_j(\bar x,v_j)=0\right\}$$

令 $a\in N_F(\bar x)$,设 $h(x):=-\langle a,x\rangle$,则 $h(x)$ 在 F 上能达到最小值. 又

$$F=\{x:g_j(x,v_j)\leqslant 0,v_j\in V_j,j\in J\}$$
$$=\{x:\max_{v_j\in V_j}g_j(x,v_j)\leqslant 0,j\in J\}$$

那么,把假设运用到拉格朗日对偶[11],就有:

$$-\langle a,\bar x\rangle=\inf_{x\in F}\{-\langle a,x\rangle\}=$$

$$\max_{\beta_j\geqslant 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{-\langle a,x\rangle+\sum_{j=1}^m\beta_j\max_{v_j\in V_j}g_j(x,v_j)\right\}=$$

$$\max_{\beta_j\geqslant 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\max_{v_j\in V_j}\left\{-\langle a,x\rangle+\sum_{j=1}^m\beta_j g_j(x,v_j)\right\}$$

又因为每一个 $V_j,j\in I$ 是紧集,对每一个 $v_j\in V_j\subseteq\mathbb{R}^q$ 满足 $g_j(\cdot,v_j)$ 是一个连续的凸函数,且对每一个 $x\in\mathbb{R}^n$ 满足 $g_j(x,\cdot)$ 是一个连续的凹函数. 由参考文献凹-凸极大极小值定理[12],则得到:

$$\max_{\beta_j\geqslant 0}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\max_{v_j\in V_j}\left\{-\langle a,x\rangle+\sum_{j=1}^m\beta_j g_j(x,v_j)\right\}=$$

$$\max_{\beta_j\geqslant 0}\max_{v_j\in V_j}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{-\langle a,x\rangle+\sum_{j=1}^m\beta_j g_j(x,v_j)\right\}=$$

$$\max_{\beta_j\geqslant 0,v_j\in V_j}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{-\langle a,x\rangle+\sum_{j=1}^m\beta_j g_j(x,v_j)\right\}$$

因此,存在 $\bar\beta_j\geqslant 0,\bar v_j\in V_j$,使得

$$-\langle a,\bar x\rangle=\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{-\langle a,x\rangle+\sum_{j=1}^m\bar\beta_j g_j(x,\bar v_j)\right\}\leqslant$$

$$-\langle a,x\rangle+\sum_{j=1}^m\bar\beta_j g_j(x,\bar v_j),\forall x\in\mathbb{R}^n$$

令 $x=\bar{x}$，就有 $\sum_{j=1}^{m}\bar{\beta}_j g_j(\bar{x},\bar{v}_j)\geqslant 0$，又 $\bar{\beta}_j\geqslant 0$，$\bar{x}\in F$，则有 $\bar{\beta}_j g_j(\bar{x},\bar{v}_j)=0$. 则

$$-<a,\bar{x}>+\sum_{j=1}^{m}\bar{\beta}_j g_j(\bar{x},\bar{v}_j)\leqslant$$

$$-<a,x>+\sum_{j=1}^{m}\bar{\beta}_j g_j(x,\bar{v}_j),\ \forall x\in\mathbb{R}^n$$

$$<a,x-\bar{x}>\leqslant\sum_{j=1}^{m}\bar{\beta}_j g_j(x,\bar{v}_j)-$$

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{\beta}_j g_j(\bar{x},\bar{v}_j),\ \forall x\in\mathbb{R}^n$$

因此，

$$a\in\bigcup_{v_j\in V_j,\beta_j\geqslant 0}\left\{\sum_{j=1}^{m}\beta_j a_j : a_j\in\partial_x g_j(\bar{x},v_j),\ \beta_j g_j(\bar{x},v_j)=0\right\}$$

即证得式(1)成立.

(必要性)成立只需要用到凸规划在凸性条件下的最优性充分论断.

2 主要结果

在这一部分，根据给定问题的一个鲁棒解点得到了各种鲁棒解集的刻画. 本文首先得到目标函数的次微分在解集上的基本性质. 注意，在没有不确定集的情况下，单目标优化问题的目标函数的次微分在它解集的相对代数内部上是连续的，对于数据不确定型凸优化问题的这个一般结果如下.

对于给定点 $x\in\mathbb{R}^n$，令

$$A_i(x)=\bigcup_{u_i\in U_i}\{\partial_x f_i(x,u_i)\},\ i\in I$$

其中，

$$U_i(x)=\{\bar{u}_i : f_i(x,\bar{u}_i)=\max_{u_i\in U_i} {}_i(x,u_i)\}$$

令 $A(x)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i(x)$，首先证明，$A(x)$ 在鲁棒解集 S_λ 的相对代数内部上是常值.

引理 2 (广义常微分性质)对问题$(\mathrm{SP})_\lambda$，令 S_λ 是鲁棒解集，假设对每一个 $x\in\mathbb{R}^n$ 满足 $f_i(x,\cdot)$ 和 $g_j(x,\cdot)$，$\forall i\in I$，$\forall j\in J$ 是凹函数. 那么对任意的 $x_1,x_2\in\mathrm{ri}S_\lambda$，有 $A(x_1)=A(x_2)$. 并且，对任意的 $x\in\mathrm{ri}S_\lambda$，$x'\in S_\lambda$，$A(x)\subseteq A(x')$.

证 对任意的 $x_1,x_2\in\mathrm{ri}S_\lambda$. 鲁棒解集 S_λ 是如下这个非光滑凸优化问题的解集：

$$\min\ \tilde{f}(x)\qquad \text{s. t.}\ \ x\in F$$

由参考文献[5]，则可得到 $\partial\tilde{f}(x)$ 在 $\mathrm{ri}S_\lambda$ 上是常值. 因此，$\partial\tilde{f}(x_1)=\partial\tilde{f}(x_2)$，又

$$\partial\tilde{f}(x_1)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\partial\tilde{f}_i(x_1)=$$

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\left(\bigcup_{u_i\in U_i}\{\partial_x f_i(x_1,u_i): f_i(x_1,u_i)=\tilde{f}_i(x_1)\}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i(x_1)=A(x_1)$$

同理，$\partial\tilde{f}(x_2)=A(x_2)$，则有 $A(x_1)=A(x_2)$. 因此，这个结论由引理 1 就可得到.

下面证第二个论断，令 $x\in\mathrm{ri}S_\lambda$，$x'\in S_\lambda$. 那么，对任意的 $\gamma\in(0,1)$，$\gamma x+(1-\gamma)x'\in\mathrm{ri}S_\lambda$，令 $\omega\in A(x)$，并令 $\gamma_n\to 0$.

定义 $x_n=\lambda_n x+(1-\lambda_n)x'$，那么 $x_n\to x'$ 且 $\omega\in A(x)=A(x_n)$. 因此存在 $\omega_{ni}\in A_i(x_n)=\bigcup_{u_{ni}\in U_i(x_n)}\left\{\partial_x f_i(x_n,u_{ni})\right\}$，$i\in I$，使得 $\omega=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_{ni}$. 存在 $u'_{ni}\in U_i(x_n)\subseteq U_i$ 使得 $f_i(x_n,u'_{ni})=\max_{u_i\in U_i}f_i(x_n,u_i)$，并且 $\omega_{ni}\in\partial_x f_i(x_n,u'_{ni})$，又因为 U_i 是紧集，则对每一个 $i\in I$，$\{u'_{ni}\}$ 有收敛子列，不妨设 $u'_{ni}\to\bar{u}_i\in U_i$，那么有：

$$<\omega_{ni},z-x_n>\leqslant f_i(z,u'_{ni})-f_i(x_n,u'_{ni}),$$
$$z\in\mathbb{R}^n,\ i=1,2,\cdots,p$$

将以上 P 个不等式分别乘上 λ_i 再相加得：

$$<\omega,z-x_n>=<\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_{ni},z-x_n>\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(z,u'_{ni})-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x_n,u'_{ni}),\ z\in\mathbb{R}^n$$

令 $n\to\infty$，有 $f_i(x',\bar{u}_i)=\max_{u_i\in U_i}f_i(x',u_i)$ 且

$$<\omega,z-x'>\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(z,\bar{u}_i)-$$

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x',\bar{u}_i),\ z\in\mathbb{R}^n$$

又 $f_i(z,\bar{u}_i)\leqslant\max_{u_i\in U_i}f_i(z,u_i)$，则有：

$$<\omega,z-x'>\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(z,u_i)-$$

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(x',u_i)=\tilde{f}(z)-\tilde{f}(x'),\ z\in\mathbb{R}^n$$

则 $\omega\in\partial\tilde{f}(x')$，即 $\omega\in A(x')$. 因此，证得：

$$A(x)\subseteq A(x')$$

注 1 广义常微分性质在没有不确定集的情况下，对于一个光滑凸优化问题也成立，即目标函数在解集上的梯度是常值.

推论 1　对问题$(\mathrm{SP})_\lambda$，设U_i和$V_j, i\in I, j\in J$是单纯形集，$\tilde{f}(x)$是连续可微的，令S_1是解集．那么，$\nabla\tilde{f}(x)$在S_1上是常值．

证　令U_i和$V_j, i\in I, j\in J$是单纯形集．那么，运用以上引理，可知$\nabla\tilde{f}(x)$在$\mathrm{ri}S_1$上是常值．令$x_0\in S_1, a\in\mathrm{ri}S_1$．那么，对任意的$\gamma\in(0,1)$有$\gamma a+(1-\gamma)x_0\in\mathrm{ri}S_1$．因此，$\nabla\tilde{f}(\gamma a+(1-\gamma)x_0)=\nabla\tilde{f}(a)$，令$\gamma\to 0$，因为$\tilde{f}(x)$是连续可微的，因此有$\nabla\tilde{f}(x_0)=\nabla\tilde{f}(a)$．则结论成立．

在如下的命题中，本文获得了一个基本的鲁棒解集的刻画．

命题 2（基本的鲁棒解集刻画）　对于问题$(\mathrm{SP})_\lambda$，令F是鲁棒可行集，令S_λ是鲁棒解集．假设，对每一个$x\in\mathbb{R}^n$，满足$f_i(x,\cdot)$和$g_j(x,\cdot), i\in I, j\in J$是凹函数，令$a\in S_\lambda$，那么有：

$$S_\lambda=\{x\in F:\langle\omega_a,x-a\rangle=0,\ \exists\omega_a\in A(x)\cap A(a)\}$$

其中：

$$A(x)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\left(\bigcup_{u_i\in U_i(x)}\{\partial_x f_i(x,u_i)\}\right)$$

$$U_i(x)=\left\{\bar{u}_i\in U_i: f_i(x,\bar{u}_i)=\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)\right\}, i\in I$$

证　$[\subseteq]$令$x\in S_\lambda$，显然，$x\in F$．设$\tilde{x}\in\mathrm{ri}S_\lambda$．首先证$A(\tilde{x})\neq\varnothing$．因为$f_i(\cdot,\cdot), i\in I$连续的且对所有的$u_i\in U_i$，满足$f_i(\cdot,u_i)$是凸的，则$\partial_x f_i(\tilde{x},u_i)\neq\varnothing$且$U_i(\tilde{x})\neq\varnothing$，$A_i(\tilde{x})=\bigcup_{u_i\in U_i(\tilde{x})}\{\partial_x f_i(\tilde{x},u_i)\}\neq\varnothing$，$i\in I$. 因此$A(\tilde{x})=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_i(\tilde{x})\neq\varnothing$．取$\omega\in A(\tilde{x})$，又$\omega\in A(\tilde{x})\subseteq A(x)\cap A(a)$．因为$\tilde{x}\in riS_\lambda$，则$\exists y\in S_\lambda$，$\gamma\in(0,1)$使得$\tilde{x}=\gamma x+(1-\gamma)y$．又$\omega\in A(\tilde{x})$，则存在$\omega_i\in\partial_x f_i(\tilde{x},\tilde{u}_i)$，$\tilde{u}_i\in U_i$，$i\in I$，使得$\omega=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_i$，$f_i(\tilde{x},\tilde{u}_i)=\max_{u_i\in U_i}f_i(\tilde{x},u_i)$．

因此有：

$$(1-\gamma)\langle\omega_i,x-y\rangle=\langle\omega_i,x-\tilde{x}\rangle\leqslant f_i(x,\tilde{u}_i)-f_i(\tilde{x},\tilde{u}_i)\leqslant\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)-\max_{u_i\in U_i}f_i(\tilde{x},u_i), i=1,2,\cdots,p$$

把以上p个不等式分别乘上$\lambda_i, i=1,2,\cdots,p$再相加得：

$$(1-\gamma)\langle\omega,x-y\rangle=\langle\omega,x-\tilde{x}\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_i,x-\tilde{x}\right\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(\tilde{x},u_i)=0$$

又

$$\gamma\langle\omega_i,y-x\rangle=\langle\omega_i,y-\tilde{x}\rangle\leqslant f_i(y,\tilde{u}_i)-f_i(\tilde{x},\tilde{u}_i)\leqslant\max_{u_i\in U_i}f_i(y,u_i)-\max_{u_i\in U_i}f_i(\tilde{x},u_i), i\in I$$

同样可以得到：

$$\gamma\langle\omega,y-x\rangle=\langle\omega,y-\tilde{x}\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_i,y-\tilde{x}\right\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(y,u_i)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(\tilde{x},u_i)=0$$

因为$\gamma\in(0,1)$，则

$$\langle\omega,x-y\rangle\leqslant 0,\ \langle\omega,y-x\rangle\leqslant 0$$

因此，有$\langle\omega,y-x\rangle=0$，即$\langle\omega,x-\tilde{x}\rangle=0$．

同理，由$a\in S_\lambda$，可得$\langle\omega,a-\tilde{x}\rangle=0$．因此

$$\langle\omega,x-a\rangle=\langle\omega,x-\tilde{x}\rangle+\langle\omega,\tilde{x}-a\rangle=0$$

则证得：

$$\exists\omega\in A(x)\cap A(a)\text{且}\langle\omega,x-a\rangle=0$$

$[\supseteq]$取$x\in F$满足$\exists\omega_a\in A(x)\cap A(a)$使得$\langle\omega_a,x-a\rangle=0$．因为$\omega_a\in A(x)$，则存在$\omega_i\in\partial_x f_i(x,\bar{u}_i)$，$\bar{u}_i\in U_i$，$i\in I$使得：

$$\omega_a=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_i, f_i(x,\bar{u}_i)=\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)$$

那么就有：

$$\langle\omega_i,a-x\rangle\leqslant f_i(a,\bar{u}_i)-f_i(x,\bar{u}_i)\leqslant\max_{u_i\in U_i}f_i(a,u_i)-\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i), i=1,2,\cdots,p$$

$$0=\langle\omega_a,a-x\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_i,a-x\right\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(a,u_i)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)$$

则有：

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(a,u_i)$$

又$a\in S_\lambda$，则$x\in S_\lambda$．

注 2　对数据不确定集是仿射形式的参数化鲁棒最优性问题时$f_i(x,\cdot), i\in I$的凹性假设是自动成立的．

对问题$(\mathrm{SP})_\lambda$，令F是鲁棒可行集，令S_λ为鲁棒解集．令$a\in S_\lambda$且有

$$u_i^a\in U_i, \beta_j^a\geqslant 0, v_j^a\in V_j, i\in I, j\in J$$

满足

$$0 \in \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \partial_x f_i(a,u_i^a) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j^a \partial_x g_j(a,v_j^a), \beta_j^a g_j(a,v_j^a) = 0$$

且 $f_i(a,u_i^a) = \max_{u_i \in U_i} f(a,u_i)$ (3)

定义拉格朗日函数 $L_a(\cdot, \beta^a, u^a, v^a)$ 为

$$L_a(x,\beta^a,u^a,v^a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x,u_i^a) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j^a g_j(x,v_j^a), x \in \mathbb{R}^n$$

定理 3 (鲁棒解集上的常值拉格朗日函数)对于$(\mathrm{SP})_\lambda$ 问题,令 F 是鲁棒可行集,S_λ 是鲁棒解集. 假设对每一个 $x \in \mathbb{R}^n$,满足 $f_i(x,\cdot)$ 和 $g_j(x,\cdot)$,$i \in I, j \in J$ 是凹函数,且存在一个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$g_j(x_0,v_j) < 0, v_j \in V_j, j \in J$$

令 $a \in S_\lambda, \beta_j^a \geqslant 0, u_i^a \in U_i, v_j^a \in V_j, i \in I, j \in J$ 满足式(3). 那么,对每一个 $x \in S_\lambda$ 有:

$$\beta_j^a g_j(x,v_j^a) = 0, \ f_i(x,u_i^a) = \max_{u_i \in U_i} f_i(x,u_i)$$

且 $L_a(\cdot,\beta^a,u^a,v^a)$ 在 S_λ 上是常数.

证 由 $a \in S_\lambda$ 及命题 2 则有:

$$0 \in L_a(a,\beta^a,u^a,v^a)$$

因此,由凸函数的次微分定义,对所有的 $x \in \mathbb{R}^n$

$$0 \leqslant L_a(x,\beta^a,u^a,v^a) - L_a(a,\beta^a,u^a,v^a)$$

因此,对所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 有:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x,u_i^a) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j^a g_j(x,v_j^a) \geqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(a,u_i^a) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j^a g_j(a,v_j^a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(a,u_i^a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(a,u_i) \quad (4)$$

其中,由一个鲁棒解的乘子刻画可知最后一个等式成立. 又由每一个 $x \in S_\lambda$ 有:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(x,u_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(a,u_i)$$

因此,对每一个 $x \in S_\lambda$ 有:

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j^a g_j(x,v_j^a) \geqslant 0$$

又对每一个 $x \in S_\lambda \subseteq F$,有 $g_j(x,v_j^a) \leqslant 0$,那么有 $\sum_{j=1}^{m} \beta_j^a g_j(x,v_j^a) \leqslant 0$. 因此,可得:

$$\beta_j^a g_j(x,v_j^a) = 0, \ j \in J$$

由式(4)$\beta_j^a g_j(x,v_j^a) = 0, j \in J$ 可得:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(x,u_i) \geqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x,u_i^a) \geqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(a,u_i)$$

又对每一个 $x \in S_\lambda$ 有:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(x,u_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(a,u_i)$$

因此:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x,u_i^a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(x,u_i)$$

则有 $f_i(x,u_i^a) = \max_{u_i \in U_i} f_i(x,u_i), i \in I$

又对每一个 $x \in S_\lambda$ 有:

$$L_a(x,\beta^a,u^a,v^a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x,u_i^a) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j^a g_j(x,v_j^a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(x,u_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \max_{u_i \in U_i} f_i(a,u_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(a,u_i^a)$$

则 $L_a(\cdot,\beta^a,u^a,v^a)$ 在 S_λ 上是常数.

定理 4 (鲁棒解集的乘子刻画)对于问题$(\mathrm{SP})_\lambda$,令 F 是鲁棒可行集,S_λ 为鲁棒解集. 设对每一个 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 $f_i(x,\cdot)$ 和 $g_j(x,\cdot)$,$i \in I, j \in J$ 是凹函数,并且存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$,使得 $g_j(x_0,v_j) < 0, v_j \in V_j, j \in J$. 令 $a \in S_\lambda$,并且 $\beta_j^a \geqslant 0, u_i^a \in U_i, v_j^a \in V_j$ 是与 a 相关的乘数和不确定元素. 那么

$$S_\lambda = \Big\{ x \in F: \beta_j^a g_j(x,v_j^a) = 0, j \in J$$

$$f_i(x,u_i^a) = \max_{u_i \in U_i} f_i(x,u_i), i \in I$$

$$\exists \omega_a \in \partial_x \Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x,u_i^a) \Big) \cap \partial_x \Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(a,u_i^a) \Big), \ < \omega_a, x - a > = 0 \Big\}$$

证 [$\subseteq$]令 $x \in S_\lambda$,显然 $x \in F$. 由乘子的刻画可知,存在

$$\beta_j^a \geqslant 0, u_i^a \in U_i, v_j^a \in V_j, i \in I, j \in J \text{ 使得}$$

$$0 \in \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \partial_x f_i(a,u_i^a) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j^a \partial_x g_j(a,v_j^a), \beta_j^a g_j(a,v_j^a) = 0$$

且 $f_i(a,u_i^a) = \max_{u_i \in U_i} f_i(a,u_i)$.

那么,存在

$$\omega_a \in \partial_x \Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(a,u_i^a) \Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\partial_x f_i(a,u_i^a),z_a\in\sum_{j=1}^{m}\beta_j^a\partial_x g_j(a,v_j^a)$$

使得 $\omega_a+z_a=0$. 则有:

$$<z_a,x-a>\leqslant\sum_{j=1}^{m}\beta_j^a g_j(x,v_j^a)-\sum_{j=1}^{m}\beta_j^a g_j(a,v_j^a)$$

由定理 3, $x\in S_\lambda$, $a\in S_\lambda$, 则有:

$$f_i(x,u_i^a)=\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)$$

且 $\beta_j^a g_j(x,v_j^a)=0,i\in I,j\in J$, 那么就有 $<z_a,x-a>\leqslant 0$. 又由 $\omega_a+z_a=0$, 就有:

$$<\omega_a,x-a>\geqslant 0\qquad(5)$$

由 $\omega_a\in\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\partial_x f_i(a,u_i^a)$, 有:

$$<\omega_a,x-a>\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x,u_i^a)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(a,u_i^a)=$$

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(a,u_i)=0\qquad(6)$$

由式(5)和式(6),可得到:

$$<\omega_a,x-a>=0\qquad(7)$$

接下来要证 $\omega_a\in\partial_x(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x,u_i^a))$.

对任意的 $y\in\mathbb{R}^n$, 有:

$$<\omega_a,y-x>=<\omega_a,y-a>+$$
$$<\omega_a,a-x>=<\omega_a,y-a>\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y,u_i^a)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(a,u_i^a)=$$
$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y,u_i^a)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(a,u_i)=$$
$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y,u_i^a)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)=$$
$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y,u_i^a)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x,u_i^a)$$

则证得 $\omega_a\in\partial_x\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x,u_i^a)\right)$.

[$\supseteq$] 令 $x\in F$ 满足

$$\beta_j^a g_j(x,v_j^a)=0,j\in J,f_i(x,u_i^a)=\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i),i\in I$$

且存在

$$\omega_a\in\partial_x\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x,u_i^a)\right)\cap\partial_x\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(a,u_i^a)\right)$$

使得 $<\omega_a,x-a>=0$. 因此,由

$\omega_a\in\partial_x\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x,u_i^a)\right)$ 有

$$0=<\omega_a,a-x>\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(a,u_i^a)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x,u_i^a)$$

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x,u_i^a)\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(a,u_i^a)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\max_{u_i\in U_i}f_i(a,u_i)$$

又 $a\in S_\lambda$ 且 $x\in F$, 则 $x\in S_\lambda$.

注 3　对于不确定光滑凸优化问题的鲁棒解集也有相似的乘子刻画.

参考文献(References):

[1] BURKE J V, FERRIS M C. Characterization of Solution Sets of Convex Programs[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1991

[2] JEYAKUMAR V, LEE G M, DINH N. Characterizations of Solution Sets of Convex Vector Minimization Problems[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 174(3):1380—1395

[3] SON T Q, DINH N. Characterizations of Optimal Solution Sets of Convex Infinite Programs[J]. TOP, 2008, 16(1):147—163

[4] ZHAO K Q, YANG X M. Characterizations of the Solution Set for a Class of Nonsmooth Optimization Problems[J]. Operations Research Transactions, 2012, 7(4):685—694

[5] WUZ L, WU S Y. Characterizations of the Solution Sets of Convex Programs and Variational Inequality Problems[J]. Journal of Optimization Theory MYM & MYM Applications, 2006, 130(2):341—360

[6] BEN-TAL A, GHAOUI L E, NEMIROVSKI A. Robust Optimization[M]. Princeton: Princeton University Press, 2009

[7] BERTSIMAS D, BROWN D B, CARAMANIS C. Theory and Applications of Robust Optimization[J]. Siam Review, 2010, 53(3):464—501

[8] BECK A, BEN-TAL A. Duality in Robust Optimization: Primal Worst Equals Dual Best[J]. Operations Research Letters, 2009, 37(1):1—6

[9] JEYA KUMAR V, LI G. Characterizing Robust Set Containments and Solutions of Uncertain Linear Programs without Qualifications[J]. Operations Research Letters, 2010, 38(3):188—194

[10] JEYAKUMARV, WANG J H, LI G. Lagrange Multiplier Characterizations of Robust Best Approximations under Constraint Data Uncertainty[J]. Journal of Mathematical

Analysis MYM & MYM Applications, 2012, 393 (1): 285—297

[11] ROCKAFE LLAR R T. Convex Analysis (Princeton Mathematical Series) [M]. Princeton: Princeton University Press, 1970

[12] Z LINES CU C. Convex Analysis in General Vector Spaces[M]. Singapore: World Scientific, 2002

[13] 林锉云,董家礼. 多目标优化的方法与理论[M]. 长春:吉林教育出版社,1992
LIN C Y, DONG J L. Method and Theory of Multiobjective Optimization [M]. Changchun: Jilin Education Press, 1992

[14] KU ROIWA D, LEE G M. On Robust Multiobjective Optimization[J]. Vietnam Journal of Mathematics, 2012, 40(2-3): 305—317

[15] JEYAKUMAR V, LEE G M, LI G. Characterizing Robust Solution Sets of Convex Programs under Data Uncertainty [J]. Journal of Optimization Theory MYM & MYM Applications, 2015, 164(2): 407—435

[16] 胡毓达,孟志青. 凸分析与非光滑分析[M]. 上海:上海科学技术出版社,2000
HU Y D, MENG Z Q. Convex Analysis and Nonsmooth Analysis [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 2000

[17] 赵洁,陈林,赵克全. 一类多目标规划问题的混合型对偶[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2011,28(2): 145—146
ZHAO J, CHEN L, ZHAO K Q. A Hybrid Class of Multi-Objective Programming Duality[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2011, 28(2): 145—146

Optimality and Duality for Robust Multiobjective Optimization Problems

ZHENG Shuang, ZHOU Jun-yi

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: For a class of robust convex multiobjective optimization problem with uncertain data, a robust counterpart under general uncertain sets is given. The scalar quantization method is used to transform the robust multiobjective counterpart into a robust single object convex optimization problem, to establish the connection between the two solutions. And we obtain a multiplicative description of a scalarized robust solution and the generalized constant differential property and constant Lagrangian property of the scalarization problem on its robust solution set. Finally, through the preceding properties, the proper efficient solution set of a robust convex multiobjective optimization problem is characterized and proved.

Key words: multiobjective optimization; scalarization; robust proper efficient solution set

责任编辑:罗姗姗

引用本文/Cite this paper:

郑霜,周俊屹. 鲁棒多目标优化问题真有效解集的刻画[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2019,36(1):13—20

ZHENG S, ZHOU J Y. Optimality and Duality for Robust Multiobjective Optimization Problems[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2019, 36(1): 13—20