

均值—绝对偏差模型鲁棒优化策略的有效性

——基于中国股票市场的实证分析*

赵庆^{1,2}

(1.东北财经大学研究生学院,辽宁大连116025;2.辽宁对外经贸学院国际经贸学院,辽宁大连116052)

摘要:在不确定的金融市场中,由于各种金融产品风险存在差异,因此,如何在兼顾收益与风险的情况下对产品进行组合选择,也就成为投资组合的重要问题。通过将均值—绝对偏差模型的鲁棒优化模型与我国证券市场实际情况相结合的方法,提出简化模型,并且以MATLAB为工具,提出该线性模型求最优解的新方法。同时,将均值—绝对偏差模型的鲁棒优化模型的最优解与其他投资组合模型进行比较,证明该模型优于所选的其他模型。

关键词:鲁棒优化;均值—绝对偏差模型;投资组合;MATLAB

中图分类号:F224.0;F830.91 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-0598(2015)01-0024-06

引言

在不确定的金融市场中,由于各种金融产品风险存在差异,因此,如何在兼顾收益与风险的情况下对产品进行组合选择,也就成为投资组合的重要问题。Markowitz(1952)^[1]提出了投资组合的均值—方差模型(MV模型),它相继应用于金融投资分析的不同领域,但是MV模型的缺点也比较明显:(1)对参数的不确定性与估计误差敏感,即均值或方差一点小的扰动都可能完全改变最优投资组合。(2)计算过程复杂,即对于包含 n 种证券的组合而言,其协方差矩阵计算量大,需要计算 $n(n+1)/2$ 次。(3)MV模型形式为二次规划模型,其最优解求解比较困难,有时甚至于无法求解。基于上述原因,国内外学者发展了很多其他投资组合模型,其中Konno和Yamazaki(1991)^[2]提出了均值—绝对偏差模型(MAD模型),该模型利用均值—绝对偏差风险目标函数克服了缺点(1),同时其线性化模型克服了缺点(2)和(3)。在该模型基础上,国内学

者研究出几种衍生模型:康志林(2013)^[3]提出了均值—绝对偏差投资组合修正模型,该模型针对投资者对不同收益率资产的偏好,通过引入收益权值系数,直接对各证券的收益离差进行非对称影响分析,重构均值—绝对离差投资组合模型,并将模型转换为线性规划;张鹏(2009)^[4]提出具有上下界限限制的均值—平均绝对偏差投资组合模型,并运用线性规划的旋转算法进行求解;武敏婷,等(2010)^[5]在均值—绝对偏差投资模型中加入风险价值约束,给出了基于VaR约束的投资组合优化模型;刘善存,等(2001)^[6]用对策论方法讨论证券组合投资问题,建立了组合投资问题的基本对策模型。

鲁棒性是一个系统面临内部结构和外部环境变化时,能够保持其系统功能的能力。Tetlow(2001)^[7]指出:在金融系统中,来自市场波动、汇率变动、利率及资产价格变化等方面的内部变化不确定性,来自自然灾害、国际政治和经济环境变化等方面的外部不确定性,直接影响到金融系统的正常

* [收稿日期]2014-09-18

[作者简介]赵庆(1983—),男,辽宁省大连市人;东北财经大学金融学院博士研究生,辽宁对外经贸学院国际经贸学院讲师,主要从事金融工程研究。

运行,鲁棒性成为能否确保金融系统持续、正常运行的重要因素。金融系统的鲁棒性是金融系统的一个重要属性,而金融系统中的鲁棒优化则是为了实现金融系统的鲁棒而进行的一种优化设计。目前,国内外关于鲁棒优化投资组合的文献也较多,Ghahtarani 和 Najafi (2013)^[8] 基于目标规划方法 (Goal Programming Approach) 提出多目标函数鲁棒优化模型。Costa 和 Paiva (2002)^[9] 在假设已知期望收益率和协方差矩阵边界的条件下,基于线性矩阵不等式方法,研究了鲁棒跟踪误差投资组合优化问题。Zheng 和 Liang (2013)^[10] 在该方法基础上,引入交易费用。高莹和黄小原 (2008) 提出基于线性矩阵不等式的动态投资组合鲁棒策略。张春梅和陈志平 (2013)^[11] 针对有限情形的不确定集、正态分布等情形提出了一种满足齐次性、次可加性和单调性的相对鲁棒的 CVaR 风险度量。

对于鲁棒优化方法而言,从模型的数学描述角度看,解决内部结构变动问题时,一种是约束条件参数的不确定性,另一种是目标函数参数的不确定性。鲁棒优化解决外部环境变化时,主要是外界不确定性扰动。到目前为止,鲁棒优化方法主要有三种方法。第一种方法是 Soyster (1973)^[12] 提出的,他在鲁棒优化方面做了开创性的工作,提出了一个线性优化模型来求得一个对所有属于一个凸集的数据均可行的解。但这个推断模型产生的解在某种意义上太保守,为了保证鲁棒性,放弃了很多的标称问题的最优性。第二种方法是 Ben-Tal 和 Nemirovski (1998)^[13] 提出的新的鲁棒优化处理不确定性环境方法,对处理过度保守性作出了努力,将鲁棒优化应用到具有椭圆不确定集合的线性规划问题中,得到了二次锥规划,但由于其非线性性,其求解较为复杂。第三种方法是 Bertsimas 和 Sim (2004)^[14] 专门为多种不确定性提出的一种方法,是通过生成的线性鲁棒对应来控制解的保守性水平即可以调节鲁棒水平 (Protection Level, PL) 的方法,并且得到的是线性模型,相比第二种方法也更容易求解,并且该方法也很容易拓展到离散优化问题。Moon 和 Yao (2011)^[15] 基于第三种方法提出均值—绝对偏差模型的鲁棒优化线性模型 (RMAD 模型)。

本文在 Moon 和 Yao (2011)^[15] 的基础上,考虑我国证券市场的实际情况并且在不失一般性基础

上,提出了适合我国投资组合管理的、基于鲁棒优化的简化 RMAD 模型,并且利用 MATLAB 求最优解。同时,将 RMAD 模型的最优解与张鹏 (2009)^[4]、武敏婷,等 (2010)^[5]、刘善存,等 (2001)^[6] 的研究结果进行比较分析,根据投资组合绩效分析,RMAD 模型优于上述三种模型。

一、模型描述

(一) 均值—绝对偏差模型 (MAD 模型)

假设证券投资基金中包含 n 种证券;第 j 种证券的回报率为 r_{jt} ($j=1,2,\dots,n,t=1,2,\dots,T$); t 为投资组合时间间隔; T 为投资组合时间跨度,即有 T 个时间段; x_j 为投资组合中第 j 种资产投资权重; ρ 为投资者对该投资组合的期望收益率; r_j 为第 j 种资产期望收益率, $r_j = E[r_{jt}]$ (即 r_{jt} 的算术平均数); u_j 为该投资组合第 j 种资产投资权重 x_j 的上限; C 为该投资组合投资额。根据 Konno 和 Yamazaki (1991)^[2] 提出的 MAD 模型 (1) — (4):

$$\text{minimize } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \right| \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho C \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = C \quad (3)$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

由于 (1) — (4) 为非线性模型,求解复杂,故此在原模型基础上通过引入辅助变量 $y_t = \left| \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \right|$ 可以将其转化为线性 MAD 模型 (5) — (10):

$$\text{minimize } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \quad (5)$$

$$\text{s.t. } y_t + \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \geq 0 \quad (6)$$

$$y_t - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \geq 0 \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho C \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = C \quad (9)$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

线性模型 (5) — (10) 求解容易,如文献 [3] [4] [5] 均是以该模型为基础研究衍生模型。

(二) 均值—绝对偏差模型鲁棒优化模型(RMAD)

Moon 和 Tao (2011)^[15] 基于 Bersimas 和 Sim (2004)^[14] 鲁棒优化方法给出了 MAD 模型鲁棒优化模型: Γ_0 为鲁棒模型保护水平, $\Gamma_0 \in [0, |J_0|]$, $J_0 \equiv \{1, 2, \dots, n\}$, Γ_0 值越大意味着鲁棒水平越高, 对于给定鲁棒模型保护水平 Γ_0 , 考虑子集 S_0 满足 $S_0 \subseteq J_0$ 和 $|S_0| = |\Gamma_0|$ 。对于给定子集 S_0 和常数 \hat{r}_v , $v \notin S_0 \setminus J_0$ 。 w_j 为可行集 $|x_j|$ 的上界, 即 $|x_j| \leq w_j$ 。 \hat{r}_j 为投资者期望投资组合模型回报率 ρ 与第 j 种资产期望收益率 r_j 的偏差, 即 $\hat{r}_j = \rho - r_j$ 。 则 MAD 模型鲁棒优化模型(RMAD 模型)为(11)—(17):

$$\text{minimize } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \tag{11}$$

$$\text{s.t. } -y_t - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j)x_j + \max_{\{S_0 \cup \{v\} \mid S_0 \subseteq J_0, |S_0| = |\Gamma_0|, v \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j w_j + (\Gamma_0 - |J_0|) \times \hat{r}_v w_v \right\} \leq 0 \tag{12}$$

$$-y_t + \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j)x_j + \max_{\{S_0 \cup \{v\} \mid S_0 \subseteq J_0, |S_0| = |\Gamma_0|, v \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j w_j + (\Gamma_0 - |J_0|) \times \hat{r}_v w_v \right\} \leq 0 \tag{13}$$

$$-\sum_{j=1}^n r_j x_j + \max_{\{S_0 \cup \{v\} \mid S_0 \subseteq J_0, |S_0| = |\Gamma_0|, v \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j w_j + (\Gamma_0 - |J_0|) \times \hat{r}_v w_v \right\} + \rho C \leq 0 \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = C \tag{15}$$

$$-w_j \leq x_j \leq w_j, w_j \geq 0 \tag{16}$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, j = 1, 2, \dots, n \tag{17}$$

模型(11)—(17) 虽为 RMAD 模型, 但是其作为非线性模型很难求解。 故此, 希望能转化为线性模型以方便求解。 在 RMAD 模型线性化过程中, 选取人工变量 z_0 作为 $\sum_{j \in J_0} z_j \leq \Gamma_0$ 约束变量; 选取人工变量 p_j 作为 $z_j \leq 1, \forall j \in J_0$ 约束变量, 其中 z_0, p_j 为该模型未知变量, 需要求解; 其余变量含义均与上相同。 RMAD 线性模型为(18)—(27):

$$\text{minimize } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \tag{18}$$

$$\text{s.t. } -y_t - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j)x_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 \leq 0 \tag{19}$$

$$-y_t + \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j)x_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 \leq 0 \tag{20}$$

$$-\sum_{j=1}^n r_j x_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 + \rho C \leq 0 \tag{21}$$

$$z_0 + p_j \geq \hat{r}_j w_j \tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = C \tag{23}$$

$$p_j \geq 0, \forall j \in J_0 \tag{24}$$

$$z_0 \geq 0 \tag{25}$$

$$-w_j \leq x_j \leq w_j, w_j \geq 0 \tag{26}$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, j = 1, 2, \dots, n \tag{27}$$

本文结合中国资本市场实际情况并且在不失一般性基础上, 简化上述模型。 设定投资额 $C = 1$, 则 x_j 则代表投资组合第 j 项资产权重; 并且中国股票市场不存在卖空机制, 故 $x_j \geq 0$, 假设 $w_j = 1$, 设定 $0 \leq u_j \leq 1$, 即 $0 \leq x_j \leq \min(u_j, w_j)$; 则 RMAD 模型简化为(28)—(36):

$$\text{minimize } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \tag{28}$$

$$\text{s.t. } -y_t - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j)x_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 \leq 0 \tag{29}$$

$$-y_t + \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j)x_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 \leq 0 \tag{30}$$

$$-\sum_{j=1}^n r_j x_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 + \rho \leq 0 \tag{31}$$

$$z_0 + p_j \geq \hat{r}_j w_j \tag{32}$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 \tag{33}$$

$$p_j \geq 0, \forall j \in J_0 \tag{34}$$

$$z_0 \geq 0 \tag{35}$$

$$0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n \tag{36}$$

此线性规划可用 MATLAB linprog 函数求解。

二、实证分析

(一) 数据描述

为方便与张鹏(2009)^[4]、武敏婷, 等(2010)^[5]、刘善存, 等(2001)^[6] 的模型进行比较, 故此采用与上述文献相同数据, 如表 1 所示, 6 种证券在 8 个时期的收益率数据。

表 1 6 种证券在 8 个时期收益率数据

交易日期	证券 1	证券 2	证券 3	证券 4	证券 5	证券 6
1	0.04	0.14	0.13	0.12	0.18	0.15
2	0.07	0.06	0.13	0.04	0.06	0.04
3	0.09	0.08	0.11	0.18	0.22	0.08
4	0.13	0.15	0.15	0.13	0.15	0.06
5	0.14	0.11	0.10	0.19	0.14	0.13
6	0.17	0.13	0.07	0.16	0.06	0.05
7	0.21	0.10	0.14	0.14	0.08	0.10
8	0.24	0.11	0.11	0.11	0.09	0.09
算术平均	0.136 25	0.11	0.117 5	0.1337 5	0.122 5	0.087 5

(二) 线性 RMAD 模型求解方法

MATLAB 是具有很强数值计算、符号运算、仿真和图形显示功能的计算机数学语言。MATLAB 中解线性规划问题的函数是 linprog。函数 linprog 标准调用格式为: $[x, fval] = \text{linprog}(f, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, ub)$, 用于求解问题:

$$\text{minimize } f^T x \tag{37}$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b \tag{38}$$

$$A_{eq} x = b_{eq} \tag{39}$$

$$lb \leq x \leq ub \tag{40}$$

其中将最优目标值返回到变量 $fval$ 中。

为将 RMAD 模型(28)—(36)转换为 linprog 函数标准形式,在本文中 将 linprog 函数中未知量 x 设

为 16×1 矩阵即:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, z_0)^T \tag{41}$$

则 linprog 函数标准形式(37)中函数 f^T 为 1×16 矩阵:

$$f^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/T \ 1/T \ 1/T \ 1/T \ 1/T \ 1/T \ 1/T \ 1/T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \tag{42}$$

取鲁棒保护水平 (PL) $\Gamma_0 = 3$, 投资组合期望收益率 $\rho = 0.03$ 。可将式(29)—(30)共计 23 不等式转换为 linprog 函数标准型式(38), 矩阵 A 为 23×21 矩阵, b 为 23×1 矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & \end{bmatrix} \tag{43}$$

- [8] ALIREZA GHAHTARANI, AMIR ABBAS NAJAFI. Robust goal programming for multi-objective portfolio selection problem [J]. *Economic Modelling*, 2013, 33(5) : 588-592.
- [9] COSTAOLV , PAIVAAC . Robust portfolio selection using linear-matrix inequalities [J]. *Journal of Economic & Control*, 2002, 26(6) : 889-909.
- [10] DONG ZHENG, XI-KUN LIANG. Optimization of tracking error for robust portfolio of risk assets with transaction cost [J]. *iBusiness*, 2013, (5) 23-26.
- [11] 张春梅, 陈志平. 基于 CVaR 的相对鲁棒投资组合问题研究 [J]. *工程数学学报*, 2013, 30(4) : 525-534.
- [12] SOYER A L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming [J]. *Operations Research*, 1973, 21(5) : 1154-1157.
- [13] BEN-TAL A, NEMIROVSKI A. Robust convex optimization [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1998, 23(9) : 769-805.
- [14] BERSIMAS D, SIM M . The price of robustness [J]. *Operations Research*, 2004, 52(1) : 35-53.
- [15] YONGMA MOON, TAO YAO. A robust mean absolute deviation model for portfolio optimization [J]. *Computers & Operations Research*, 2011, 38(12) : 1251-1258.

(责任编辑: 夏 东, 朱德东)

Analysis of the Validity for the Robust Optimization Strategy of Mean - Absolute Deviation Model Based on Chinese Stock Market

ZHAO Qing^{1,2}

(1. Graduate School, Northeast University of Finance and Economics, Liaoning Dalian116025, China; 2. International Trade Institute, Liaoning University of International Business and Economics, Liaoning Dalian116052, China)

Abstract: In the uncertain financial markets, because of the difference in all kinds of the risk of financial products, how to make selection and portfolio of the products under the condition of the considering of both benefits and risks becomes an important issue of investment portfolios. Based on the combination of robust optimization of mean-absolute deviation model and the real situation of Chinese securities market, the simplified model is proposed, and through the tool of MATLAB, a new solving method for the linear model for the optimal solution is advanced. At the same time, the optimality solution to the robust model of mean-absolute deviation model is compared with other portfolio models to prove that this model is better than the selected comparative models.

Key words: robust optimization; Mean-Absolute Deviation Model; portfolio; MATLAB